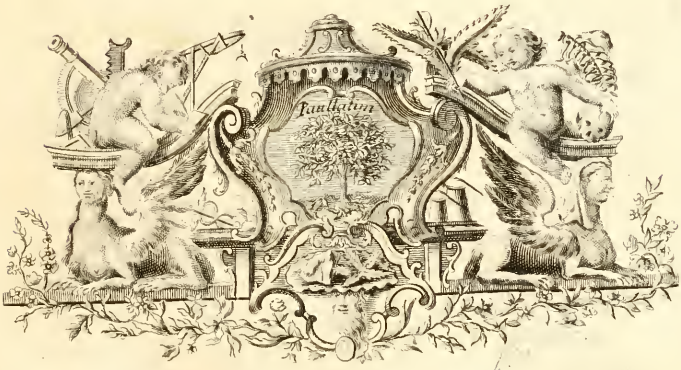
FOR THE PEOPLE
FOR EDVCATION
FOR SCIENCE

LIBRARY
OF
THE AMERICAN MUSEUM
OF
NATURAL HISTORY

COMMENTARII
ACADEMIAE
SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE.

TOMVS VII.

AD ANNOS clɔlɔccxxxiv. & clɔlɔccxxxv.



GOTTINGENSIS

PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE. clɔlɔccxl.

INDEX
COMMENTARIORVM.

IN CLASSE MATHEMATICA.

Georg. Wolffg. Krafft de Cauſtica Cycloidis. p. 3.

Eiusdem de Numeris perfectis. p. 7.

Iob. Bernoulli de motu Corporum ſe inuicem percutientium. p. 15.

Georg. Wolffg. Krafft Enucleatio Problematis Aſtronomici a *Clar. De L'Isle* propoſiti. p. 36.

Eiusdem Obſeruationes Arithmeticae de ſeptenario. p 41.

Leonh. Euleri Solutio Problematis Arithmetici de inueniendo numero, qui per datos numeros diuiſus, relinquat data reſidua. p. 46.

Eiusdem de motu Planetarum et Orbitarum determinatione. p. 67.

Eiusdem Determinatio Orbitae Solaris. p. 86.

Eiusdem Solutio Problematum quorundam Aſtronomicorum. p. 97.

Eiusdem de minimis Oſcillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium, methodus noua et facilis. p. 99.

Eiusdem de ſummis ſerierum reciprocarum. p. 123.

Eiusdem de linea celerrimi deſcenſus in medio quocunque reſiſtente. p. 135.

Eiusdem de progreſſionibus harmonicis obſeruationes. p. 150.

Dan. Bernoulli Demonſtrationes Theorematum ſuorum de oſcillationibus corporum filo flexili connexorum et catenae verticaliter ſuſpenſae. p. 162.

Leonh.

Leonh. Euleri de infinitis curuis eiusdem generis: seu methodus inueniendi aequationes pro infinitis curuis eiusdem generis. p. 174.

Eiusdem additamentum ad dissertationem de infinitis curuis eiusdem generis. p. 184.

IN CLASSE PHYSICA.

Ioh. Georg. Du Vernoi circa structuram Thymi, nouae obseruationes. p. 203.

Eiusdem de Aspectu et conformatione varia vasorum sanguineorum in diuersis particulis ventriculi Obseruationes. p. 211.

Eiusdem Continuatio Obseruationum Anatomicarum. p. 216.

Ioh. Fredr. Schreiberi Obseruationes Anatomico-practicae. p. 222.

Ios. Weitbrecht de Mutationibus Caloris et Frigoris aquae fluentis Obseruationes. p. 235.

Georg. Wolffg. Krafft de duobus Lapidibus figuratis. p. 271.

Eiusdem de inuenienda Distantia Macularum Solarium a sole. p. 279.

Ios. Weitbrecht de Circulatione Sanguinis Cogitationes Physiologicae p. 283.

Eiusdem Obseruationes Anatomicae ad historiam et actionem musculorum Frontalium, Occipitalium, Palpebrarum, faciei pertinentes. p. 331.

IN CLASSE HISTORICA.

T. S. Bayeri Elementa Calmucica. p. 345.

Eiusdem de Venedis et Eridano fluuio. p. 346.

Eiusdem de Confucii Libro Chūn çieu. p. 362.

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

DE CAVSTICA CYCLOIDIS.

AVTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

DVo caſus diſtingui poſſunt circa quaeſtionem de Cauſtica Cycloidis, vnus, qui eſt, cum radii incidentes paralleli ſunt ad Axem, alter vero, cum iidem paralleli ſunt ad Baſin, datae Cycloidis. In illo caſu Cauſtica haec nihil aliud eſt, quam alia noua Cyclois; in hoc autem, cum ſcil. radii incidentes ſunt ad Baſin paralleli, Cauſtica exinde orta talis eſt figurae, vt matrem ſuam minime referre videatur, neque ſtatim appareat, ad quodnam genus Curuarum reduci poſſit. Figura ſcil. eius ex Ill. *Hoſpitalii* Analyſi infinite paruorum § 123. huc translata, talis eſt, quae apparet AFKD, vbi radius incidens PM ad Baſin BD eſt parallelus, radius vero reflexus eſt MF, cuius longitudo aequalis eſſe debet, ex loco cit. applicatae PN circuli generatoris ANB. Proprietates huius Cauſticae *Hoſpitalius* recenſet has: 1. vt punctum F ab axe ſit remotiſſimum, radium incidentem debere procedere ex centro circuli generato-

Tabula I.

Fig. 1.

ris H. 2. Cauſticam hanc habere punctum flexus contrarii in K. 3. Spatium intra Cycloidem, AM, Cauſticam AF, et radium reflexum MF contentum, aequale eſſe dimidio ſpatii circularis APN. Praeter haec enumerata nihil vlterius neque Auctor, neque eius Commentatores *Varignonius*, *Crouſazius*, neque *Carrèus*, qui in Commentar. Acad. Pariſ. 1703. de his agit, indicant. Cum igitur mihi mirum id viſum fuiſſet, ſequi in alterutro caſuum enarratorum Cycloidem morem ſuum, vt ipſa ſe reddat; in altero vero tam longe ab hac conſuetudine abire: inueni, Cauſticam poſterioris caſus tamen non ita diuerſam eſſe à vulgaribus Cycloidibus, vt ad eas referri nequeat. Generatur enim Cauſtica haec ab eodem ſemicirculo generatore, quo Cyclois ordinaria; ſed per tangentem in vertice Circuli annexam, cuius longitudo variabilis eſt, aequalis nempe ſemper applicatae circuli PN.

§. 2. Quod vt demonſtrem, ſit Cyclois ordinaria AMD, generata ex Circulo ANB ſupra baſin BD voluto. Cauſtica radiis incidentibus PM baſi BD parallelis debita, ſit AFKD: dico, hanc deſcribi motu eiusdem Circuli ANB, qui in vertice A annexam habeat tangentem MF, cuius longitudo variet, vt in quolibet, nempe ſitu CEM aequalis ſit applicatae Circuli correſpondenti PN. Veniat enim Circulus generator in ſitum CEM, ducantur chorda BN, et praeterea rectae EM, EF; et quia EM, EF, ſunt, prior quidem ad Cycloidem, poſterior vero ad Cauſticam, normales; ductae nimirum ex puncto deſcribente in punctum contactus

tactus, (per Analyſ. inf. paruorum §. 43.) praetereaque ob Cycloidem ſit $ME = BN$, et angulus $FME = \frac{1}{2}$ arc. $ME = \frac{1}{2}$ arc. $BN = BAN = PNB$; atque adhuc $PN = MF$, ex hypoth. erunt triangula EMF et PNB ſimilia et aequalia; quare MF erit orthogonia ad Normalem EF, conſequenter Curuae $AFKD$ Tangens. Quoniam vero $EMF = PNB$, per dem. erit etiam $EMF = PME$, adeoque circa Normalem Cycloidis EM angulus PME erit Incidentiae, EMF vero Reflexionis; conſequenter patet, punctum F generaliter eſſe in Cauſtica aliqua; eſt vero idem punctum F in Cauſtica Cycloidis, per demonſtrata *Hoſpitalii*, cum ex hyp. ſit $MF = PN$; ergo manifeſtum eſt, Cauſticam dictam praeſcripto modo generari. Q. E. D.

§. 3. Anſam haec mihi praebuerunt examinandi generaliter tales curuas, quae per dictam Tangentem variabilem generantur. Itaque vniuerſaliter rem conſiderando, ſit Cyclois ordinaria AMD, atque huic annexa Curua quaſiscunque AGH. Veniat Circulus generator in ſitum MEI, habeatque diametro IM adiunctam Tangentem MF, cuius longitudo aequalis ſit Applicatae PG, quaeritur aequatio Curuae hoc modo genitae $AFLK$. Poſitis igitur Coordinatis orthogoniis $AP = x$, $PM = y$, $AQ = t$, $QF = u$, $PG = z$, $AB = a$, ducantur chorda BN, et normalis ad Cycloidem ME, demittatur perpendicularis NS, ductoque praeterea radio NC, cum Tangente Circuli generatoris NR, erunt ob PNS et CNR rectos, triangula NSR et PNC ſimilia; ſed, ex natura Cycloidis, radius CN parallelus eſt diametro Fig. 2.

IM, conſequenter parallelae etiam erunt rectae NR, MF, cum vtraque earum rectum efficiat cum parallelis CN, IM; ſed ob applicatam Curuae quaeſitae QF parallelam cum PM, erunt NR et MF quoque aequales. Habebitur ergo Analogia, $PN(\sqrt{(ax-xx)})$: $CN(\frac{1}{2}a) = NS(t-x) : NR(z)$, vnde fiet aequatio (A) $z = \frac{at-ax}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Ductâ porro applicata pn priori infinite propinqua, erunt quoque triangula ſimilia NOn, et NSR, vnde habebitur $NO(dx) : On(\frac{adx-2xdx}{2\sqrt{(ax-x^2)}}) = NS(t-x) : SR(=TF=u-y)$ et conſequenter aequatio $u-y = \frac{(t-x)(a-2x)}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Eſt autem per naturam Cycloidis, $y = \int \frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}}$, quo valore ſubſtituto, mutatur praecedens aequatio in hanc: (B) $u - \int \frac{adx-xdx}{\sqrt{(ax-x^2)}} = \frac{(t-x)(a-2x)}{2\sqrt{(ax-x^2)}}$. Quodſi igitur Curuae AGH aequatio data ſit in x et z, obtinebitur valor ipſius z in meris x, qui loco ipſius z in aequatione (A) ſubſtitutus, dabit valorem ipſius x in meris t; qui nouus valor ſubrogatus in aequatione (B), reddet aequationem conſtantem ex meris t et u, expreſſuram proprietates Curuae quaeſitae AFKL.

§. 4. Vt, ductâ EF, inueniatur, quidem illa angulum efficiat cum rectâ MF, cuidens eſt, in triangulo EMF eſſe $EM = BN = \sqrt{(a^2-ax)}$; angulus $EMF = BNR = PNB$; ergo anguli EMF ſinus erit $= \frac{PB}{BN} = \frac{a-x}{\sqrt{(a^2-ax)}}$, eiusdem vero Coſinus $= \frac{PN}{BN} = \frac{\sqrt{(ax-x^2)}}{\sqrt{(a^2-ax)}}$ vocato itaque anguli MFB ſinu m, coſinu n, erit $EM(\sqrt{aa-ax}) : MF(z) =$ ſinus $F(m)$: ſin. $E(\frac{mz}{\sqrt{aa-ax}})$. Eſt autem hic angulus E differentia angulorum M, et externi

externi ipſius F, quare orietur aequatio ſequens, $m\sqrt{(ax-x^2)}-mz=n(a-x)$; ex qua deducitur $\frac{m}{n}=\frac{a-x}{\sqrt{(ax-x^2)}-z}$ = Tangenti anguli EFM. Quare ſi accipiatur NZ = PG, et ducatur BZ, erit angulus EFM = BZN. Si itaque ſit PN = PG, vti in caſu *Hoſpitaliano* accidit: tunc erit angulus EFM rectus.

DE NVMERIS PERFECTIS.

AVTORE

G. W. Krafft.

DEprehenduntur non pauci errores authorum, de caetero doctiſſimorum, in modo inueniendi numeros perfectos; qui certe ex eo ſolo orti ſunt, quod careamus hucusque infallibili charactere numerorum primorum. Euitauit ſcopulum hunc Euclides 36. IX. cum dicit: *Si ab vnitate quotcunque numeri deinceps exponantur in dupla proportione, quoad totus compoſitus fiat primus, et totus hic in vltimum multiplicatus faciat aliquem: factus erit perfectus,* quorum ſenſus eſt, ſi quotcunque numeri, ab vnitate dupli, in vnam ſummam colligantur, donec haec ſumma ſit numerus primus: erit numerus factus ex illo primo in vltimum duplorum, perfectus. Sed vt errorum quoque exempla quaedam allegem, docet.

I. *Mi-*

I. *Michael Stifelius*, insignis alias Arithmeticus, sequentem numerorum perfectorum genesin, in Arithm. Integra pag. 10. Progressio Geometrica dupla diuidatur in binos terminos hunc in modum

1. 2 | 4. 8 | 16. 32 | 64. 128 | 256. 512 | 1024. 2048 |

quorumlibet binorum maior, vnitate minutus, ducatur in suum socium, factum erit numerus perfectus; quae sane regula fallit in ipso fere limine; nam sumatur quintum par horum numerorum, vbi $511 \times 256 = 130816$ non est numerus perfectus, quia, sequendo Euclidis effatum, $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 = 511$ non est numerus primus, qualis tamen esse deberet, si multiplicatus in 256 perfectum efficere posset, est enim $511 = 73 \times 7$.

II. *Ozanamus* dupliciter errat in hoc Problemate: primo enim in suis Elementis Algebrae pag. 290. nimis audacter asserit; Potentias binarii, quarum exponentes sint numeri pariter pares, hanc habere proprietatem, vt partibus suis aliquotis additae faciant numerum primum. Sumamus enim $2^8 = 256$, cuius partes aliquotae additae ad numerum ipsum faciunt 511, qui primus non est, fatente ipso *Ozanamo*, dum hunc numerum in catalogo primorum omittit, Recr. Mathem. pag. 22. Deinde cum *Stifelio* perfectis adnumerat quoque 130816, cui hoc attributum non deberi, iam ostendi.

III. Auctor anonymus *des Recreations Mathematiques avec l' examen etc.* 1699. in sua annotatione pag. 147.

147. recte explicat mentem Euclidis, adiungitque ad finem: *Or ce qui nous a le plus induit à enſeigner icy cette façon de cognoiſtre & trouver les nombres parfaits, a eſté, que pluſieurs, ignorans quels ſont les dits nombres parfaits, en prennent beaucoup, qu' ils eſtiment tels, qui ne le ſont pas pourtant, & entre ceux là un certain hiſtorien de ce ſiecle, bien que docte ès lettres, ſe monſtre toutes fois ignorant en Aríthmetique, veû qu' il eſtime* 120 *être un nombre parfait.* In ipſis vero Recreationibus Probl. LXX. §. 4. aſſeritur, ab 1 vsque ad 40000000, non contineri niſi ſeptem perfectos, nempe 6, 28, 496, 8128, 130816, 2096128, 33550336, quae ſeries duos falſos, nempe 130816, et 2096128, interpoſitos tenet, vti mox oſtendetur. Falſum quoque etiam eſſe, quod omnes perfecti alternatim digitos 6 et 8 in fine annexos habeant, infra apparebit ex verorum perfectorum Tabula.

Cum igitur ante complures annos acceperim priuatim à beatè apud nos defuncto *Maiero* methodum ſatis elegantem inueniendi numeros perfectos, nusquam neque ab alio neque ab ipſo publicatam: mei in defunctum officii eſſe putaui, hanc methodum hic exponere, vt ſi quid laudis etiam ex hoc ſpecimine ipſius meritis accedere poſſit, illud ipſi tribuam. Conſtat hic modus ſequenti calculo. Quoniam in hoc negotio partibus aliquotis adnumeratur etiam vnitas, ponantur numeri perfecti partes aliquotae 1, m, n, r, q, p, A, etc. ita tamen, vt duae mediae p et A in ſe multiplicatae efficiant numerum perfectum quaeſitum pA; erunt ergo partes ali-

quotae reliquae, prioribus respondentes, sequentes, $\frac{pA}{q}$, $\frac{pA}{r}$, $\frac{pA}{n}$, $\frac{pA}{m}$; ex natura vero numeri perfecti fit aequatio $1+m+n+r+q+p+A+\frac{pA}{q}+\frac{pA}{r}+\frac{pA}{n}+\frac{pA}{m}=pA$, vnde elicitur $A=\frac{1+m+n+r+q+p}{p-1-\frac{p}{q}-\frac{p}{r}-\frac{p}{n}-\frac{p}{m}}$. Quoniam vero A debet esse numerus integer, necesse est, vt fractionis modo exhibitae nominator aequalis fiat vnitati, quare $p-1-\frac{p}{q}-\frac{p}{r}-\frac{p}{n}-\frac{p}{m}=1$, vnde fit $p=\frac{2q}{q-1-\frac{q}{r}-\frac{q}{n}-\frac{q}{m}}$, vbi quidem indeterminatarum vna, e.gr. q adhuc ad numeratorem admitti debet, ne valor ipsius p nimis cito fiat determinatus, nempe aequalis binario. Ex eadem vero ratione etiam hic denominator, et omnes sequentes, aequales esse debent vnitati; vnde adhibita priori cautela, rursus fit $q-1-\frac{q}{r}-\frac{q}{n}-\frac{q}{m}=1$, hinc $q=\frac{2r}{r-1-\frac{r}{n}-\frac{r}{m}}$; porro ex $r-1-\frac{r}{n}-\frac{r}{m}$, fit $r=\frac{2n}{n-1-\frac{n}{m}}$, rursus ob $n-1-\frac{n}{m}=1$, oritur $n=\frac{2m}{m-1}$, denique ob $m-1=1$, fit $m=2$, quod substitutum in omnibus prioribus valoribus efficit $m=2$, $n=4$, $r=8$, $q=16$, $p=32$, etc. et $A=1+2+4+8+16+32$; patet ergo, partes aliquotas priores, vsque ad primam mediarum inclusiue, debere constituere progressionem Geometricam duplam, et A debere esse numerum primum, ne nouas inducat partes aliquotas, diuersas ab his quas in computum assumsimus; quod quidem in numeris modo inuentis non accidit. Cum igitur sit $A=1+m+n+r+q+p$ etc. ex prioribus, euidens est,

A de-

A debere esse summam progressionis Geometricae duplae, et summam hanc debere efficere numerum primum, quia talis debet esse A; et hoc illud ipsum est, quod Euclides expressis verbis requirit. Vocato autem numero terminorum n, erit summa huius progressionis ex n terminis constantis $= 2^n - 1$, igitur $A = 2^n - 1$, p vero, cum sit vltimus terminus huius progressionis, erit 2^{n-1}, itaque numerus perfectus generaliter erit $= 2^{n-1}(2^n - 1)$ adiectâ tamen hâc cautelâ, vt $A = 2^n - 1$ sit numerus incompositus. Quoniam vero ex valore ipsius A deducitur $2^n = A + 1$, et hinc $2^{n-1} = \frac{A+1}{2}$, erit substituto hoc valore $pA = \frac{AA+A}{2}$, vnde etiam patet, quod omnes numeri perfecti simul sint numeri triangulares, quorum latus est A.

Cum igitur in nupero Schediasmate Clar. *Eulerus* noster asseruisset, eandem hanc Formulam $2^{n-1}(2^n - 1)$ semper efficere numerum perfectum, si pro n substituantur numeri primi sequentes, 1. 2. 3. 5. 7. 13. 17. 19. 31. 41. et 47, absoluto calculo horum numerorum ope inueni perfectos sequentes: nempe si sit.

$n = 2$,	6 erit perfectus	1
$n = 3$,	28	2
$n = 5$,	496	3
$n = 7$,	8128	4
$n = 13$,	33550336	5
$n = 17$,	8589869056	6
$n = 19$,	137438691328	7
$n = 31$,	2305843008139952128	8
$n = 41$,	2417851639228158837784576	9
$n = 47$,	9903520314282971830448816128	10

In Arithmetica *Nicolai Tartaglia* Parisiis 1613. edita, occurrunt sequentes numeri perfecti:

6	1
28	2
496	3
8128	4
130816	5 *
2096128	6 *
33550336	7
536854528	8 *
8589869056	9
137438691328	10
2199022206976	11*
35184367894528	12*
562949936644096	13*
9007199187632128	14*
144115187807420416	15*
2305843008139952128	16
36893488143124135936	17*
590295810341525782528	18*
9444732965670570950656	19*
151115727451553768931328	20*

ex quibus illi, qui asteriſmo notati non ſunt, cum meis perfecte conueniunt; reliquos autem iam examinabo, num loca ſua tueri poſſint, nec ne. De *quinto* quidem res iam ſupra confecta eſt, quod ſit expungendus. *Sextus* 2096128 eſt $(2^{11}-1)\,2^{10} = 2047 \times 1024$, ſed 2047 non eſt primus numerus, compoſitus enim eſt ex

23 et 89. *Octauus* oritur ex $2^{14}(2^{15}-1) = 16384 \times 32767$ at vero 32767 non eſt primus, admittit enim diuiſores 7 et 4681. *Vndecimus* oritur ex $(2^{21}-1)\,2^{20} = 2097151 \times 1048576$, ſed 2097151 diuiſibilis eſt per 7 et 299593. *Duodecimus* exſurgit ex $(2^{23}-1)\,2^{22} = 8388607 \times 4194304$, ſed $8388607 = 47 \cdot 178481$. *Decimus tertius* naſcitur ex $(2^{25}-1)\,2^{24} = 33554431 \times 16777216$, ſed ille diuiſibilis eſt per 31 et 1082401. *Decimus quartus* generatur ex $(2^{27}-1)\,2^{26} = 134217727 \times 67108864$, ſed horum prior per 511 et 262657 diuiſibilis. *Decimus quintus* reſultat ex $(2^{29}-1)\,2^{28} = 536870911 \times 268435456$, ſed prior conſtat ex 1103×486737. *Decimus ſeptimus* ortum ſuum debet $(2^{33}-1)\,2^{32} = 8589934591 \times 4294967296$, quorum factorum prior compoſitus eſt ex 2047 et 4196353. *Decimus octauus* fit ex $(2^{35}-1)\,2^{34} = 34359738367 \times 17179869184$ quorum ille diuidi poteſt per 127 et 270549121. *Decimus nonus* oritur ex $(2^{37}-1)\,2^{36} = 137438953471 \times 68719476736$, quorum prioris menſurae ſunt 223 et 616318177. Denique *vigeſimus* ortum ſuum ducit ex $(2^{39}-1)\,2^{38} = 549755813887 \times 274877906944$, qui non habet priorem factorem primum, ſed compoſitum ex 7 et 78536544841. Adeoque inter numeros perfectos à *Tartaglia* datos omnes aſteriſmo notati ſunt expungendi, ſeruatis reliquis; hic enim author ſubſtituit in formula pro numeris perfectis $(2^n-1)\,2^{n-1}$ loco ipſius n numeros ſequentes 2. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37. 39, nempe omnes impares, in quibus ſunt compoſiti 9. 15. 21. 25. 27. 33. 35. 39.

qui excluduntur omnino, nam $2^{mn}-1$ diuisores admittit 2^m-1 et 2^n-1, si m et n sint numeri integri, neque adeo primus esse potest. Deinde ex primis 2. 3. 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. 29. 31. 37. excluduntur ex obseruatis Clar. *Euleri* sequentes: 11. nam $2^{11}-1=23.89$. deinde 23, nam $2^{23}-1$ diuidi potest per 47. porro $2^{37}-1$, nam hic diuidi potest per 223. denique $2^{29}-1$ admittit diuisorem 1103. adeoque ex viginti perfectis numeris *Tartaglianis* non nisi octo in hunc ordinem sunt admittendi. Inter reliquos numeros primos vero excludendus etiam occurrit 43, quia $2^{43}-1$ diuidi potest per 431.

Manifestum est ex his, inter 1 et 10000. Quadrilliones non plures interpositos esse numeros perfectos quam decem. Annotari quoque meretur, quod eorundem perfectorum, excepto primo, notae singulae ad se inuicem additae semper efficiant vnitatem, ex. gr. in 33550336 $6+3+3+0+5+5+3+3=28$, et $2+8=10$, et $1+0=1$. et sic de caeteris quoque; quamuis haec proprietas non sit reciproca, vt ex ea ad numerum perfectum concludere liceat, conuenit enim eadem etiam falsis *Tartaglianis* ex. gr. 5368545 28, vbi $8+2+5+4+5+8+6+3+5=46$ et $4+6=10$, et $1+0=1$. Certum denique etiam est, omnes perfectos in fine annexos habere numeros aut 6 aut 28, non vero alternatim constanter; nam in mea Tabula quintus et sextus terminantur vterque numero 6, septimus vero et octauus vterque 28.

DE

DE

MOTV CORPORVM

SE INVICEM PERCVTIENTIVM.

AVTORE

Ioh. Bernoulli. I. Fil.

PARS PRIMA.

De corporibus oſcillando ſe percutientibus.

COrpora ſuper plano aſpero rotando in ſe inuicem impingentia longe alias ſeruare leges, ac ſi colliſio fiat ſine rotatione, experientia teſtatur: Mihi autem, in leges iſtas inquirenti, obſeruatum fuit, illas pendere a regulis corporum oſcillando ſe percutientium. Hac itaque vice, quae circa regulas iſtas meditatus ſum, proponam, proxima occaſione rotationi ea applicaturus. Tabula II.

Definitio I.

I. *Motus progreſſiuus* mihi eſt, motus corporis, cuius ſingula puncta communi velocitate mota, deſcribunt lineam rectam; et per *vim viuam progreſſiuam* intelligo vim viuam corporis, quatenus ſolo motu progreſſiuo mouetur.

De-

Definitio 2.

II. *Motus gyratorius* eſt motus globi circa axem immotum gyrati; *Vim viuam gyratoriam* appello vim viuam corporis, quatenus ſolo motu gyratorio mouetur: motum iſtum deinceps definiam ex velocitate puncti, in circulo maximo ad axem gyrationis perpendiculari, ceu aequatore, ſumti.

Definitio 3.

III. *Motus oſcillatorius* eſt motus corporis oſcillantis; huius vim viuam in ſitu fili verticali, qui ſitus ſolus a nobis conſiderabitur, voco *vim viuam oſcillatoriam.*

Lemma 1.

IV. Omnis motus compoſitus ex progreſſiuo et gyratorio, quaecunque ſit ratio inter velocitates reſpectiuas, quibus hi duo motus fiunt, reduci poteſt ſingulis momentis ad motum ſimplicem oſcillatorium, ſi nimirum quaeratur debitum ſuſpenſionis punctum, circa quod globus oſcillari intelligatur. Hoc punctum erit vel in peripheria globi, vel extra, vel intra illam, prout vel motus progreſſiuus aequalis eſt gyratorio, vel vnus, alterue, praeualet. Etenim per interuallum temporis valde exiguum motus iſte compoſitus nihil aliud eſt, niſi vera oſcillatio circa debitum illud punctum ſuſpenſionis.

Lem-

Lemma 2.

V. Data distantia puncti suspensionis a superficie globi oscillantis, vna cum velocitate centri, inuenire velocitatem motus gyratorii, vt manente eadem velocitate centri, inde oriens motus compositus sit idem cum priori oscillatorio.

Sit distantia puncti suspensionis a superficie globi $=a$, radius $=b$, velocitas in centro $=v$, velocitas motus gyratorii $=x$, erit velocitas in summo peripheriae puncto $=v-x$; sed est $a+b.v::a.v-x$, igitur $x=\frac{b}{a+b}v$.

Si data velocitate motus gyratorii, quam nunc voco c, quaeratur velocitas centri, inuenietur illa $=\frac{a+b}{b}c$, vnde patet in casu $a=-b$ velocitatem in centro esse nullam.

Problema 1.

VI. *Inuenire vim viuam globi oscillantis.*

Solutio.

Intelligatur globus suspensus ex filo verticali FB, quod continuatum transeat per centrum D; Sit LBME circulus globi, in cuius directione mouetur, radius $=b$, FB distantia puncti suspensionis a superficie globi, $=a$; per puncta infinite propinqua I et i ducantur horizontales AC et ac; voceturque $BI=x$, $Ii=dx$, erit $IC=V((2bx-xx))$, ponaturque praeterea velocitas in centro $=v$. Figura 1.

Quaeremus primum vim viuam ſtrati elementaris et horizontalis, quod reſpondet ſpatiolo $ACca$: ſit itaque
Figura 2. circulus horizontalis $ARCS$ oſcillans in directione AC circa axem ſuſpenſionis, cuius diſtantia a diametro circuli $RS = \alpha$, radius circuli $= \mathfrak{G}$, $Im = \xi$, $mn = d\xi$, erit $mp = V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi)$ et diſtantia ab axe ſuſpenſionis ad applicatam $mp = V(\alpha\alpha + \xi\xi)$.

Iam cum velocitas in centro globi ſit $= v$, erit hic velocitas in $m = \frac{V(\alpha\alpha+\xi\xi)}{a+b} v$, et quia ſingula puncta in mp communi velocitate mouentur, erit vis viua ſpatioli $mnpq = \frac{\alpha\alpha+\xi\xi}{(a+b)^2} v v d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi) = \frac{vv}{(a+b)^2}(\xi\xi d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi) + \alpha\alpha d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi))$.

Huius expreſſionis ſi ſumatur integrale et dein ponatur $\xi = \mathfrak{G}$, habebitur vis viua quadrantis circuli: Integretur ergo per partes; Eſt autem pars prior $\frac{vv}{(a+b)^2}\xi\xi d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi) = \frac{-vv}{(a+b)^2}(-\xi^{\frac{3}{3}} d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G}\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{5}{3}}))$, diuidendo nimirum et rurſus multiplicando per $\xi^{\frac{1}{3}}$; ſi nunc ab hac quantitate auferatur $\frac{vv}{(a+b)^2} \times \frac{1}{4}\mathfrak{G}\mathfrak{G}\xi^{-\frac{1}{3}} d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G}\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{5}{3}})$ et dein illi rurſus addatur, erit illa $= \frac{-vv}{(a+b)^2}(-\xi^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\mathfrak{G}\mathfrak{G}\xi^{-\frac{1}{3}}) d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G}\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}}) + \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}{(a+b)^2} v v d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G}\xi^{\frac{2}{3}} - \xi^{\frac{8}{3}})$ Huius expreſſionis integrale eſt $= \frac{-vv}{4(a+b)^2}\xi(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}{4(a+b)^2} v v \int d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi)$; eſt itaque $\int(\frac{\alpha\alpha+\xi\xi}{(a+b)^2} v v d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi)) = \frac{-vv}{4(a+b)^2}\xi(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi)^{\frac{3}{2}} + \frac{\mathfrak{G}\mathfrak{G}}{4(a+b)^2} v v \int d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi) + \frac{\alpha\alpha}{(a+b)^2} v v \int d\xi V(\mathfrak{G}\mathfrak{G} - \xi\xi)$. Po-

Ponamus nunc $\xi = \mathfrak{E}$ et inueniemus vim viuam quadrantis circuli $\frac{4\alpha\alpha+\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{4(a+b)^2} vv \int d\xi \sqrt{(\mathfrak{E}\mathfrak{E}-\xi\xi)} =$ (quia $\int d\xi \sqrt{(\mathfrak{E}\mathfrak{E}-\xi\xi)} =$ quadranti, quem voco Q) $\frac{4\alpha\alpha+\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{4(a+b)^2} vv Q$; ergo vis viua totius circuli $= \frac{4\alpha\alpha+\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{(a+b)^2} vv Q$. Applicentur iam haec ad sphaeram. In hac est $\alpha = a+x$, $\mathfrak{E} = \sqrt{(2bx-xx)}$, $Q = \frac{1}{8}n.(2bx-xx)$ (per n intelligo exponentem rationis inter peripheriam circuli et radium) adeoque $\frac{4\alpha\alpha+\mathfrak{E}\mathfrak{E}}{(a+b)^2} vv Q = \frac{n}{8(a+b)^2} vv \times (8aabx+16abxx+4bbxx-4aaxx+4bx^3-8ax^3-3x^4)$, quod ductum in dx altitudinem scilicet strati dabit eius vim viuam $= \frac{n}{8(a+b)^2} vv dx (8aabx+16abxx+4bbxx-4aaxx+4bx^3-8ax^3-3x^4)$, huius integrale est $= \frac{n}{48(a+b)^2} vv (4aabxx+\frac{16}{3}abx^3+\frac{4}{3}bbx^3-\frac{4}{3}aax^3+bx^4-2ax^4-\frac{3}{5}x^5)$. In hac expressione si ponatur $x = 2b$, obtinebitur vis viua totius sphaerae oscillantis $= \frac{2}{3}nb^3 vv \left(\frac{aa+2ab+\frac{7}{5}bb}{(a+b)^2}\right) =$ (si $\frac{2}{3}nb^3$ vtpote massa globi vocetur M) $\frac{aa+2ab+\frac{7}{5}bb}{(a+b)^2} vv M$. Q. E. I.

Corollarium 1.

VII. Si ponatur $a = \infty$, habebitur vis viua globi solo motu progressiuo moti $= vv M$, plane vt fieri debet.

Corollarium 2.

VIII. Vis viua motus compositi ex progressiuo et gyratorio, quorum velocitates sunt inter se aequales, in-

uenitur, ſi ponatur $a = 0$, hoc caſu expreſſio generalis abit in hanc $\frac{2}{3}vvM$; ergo vis viua progreſſiua ſe habet ad vim viuam oſcillatoriam, vbi punctum ſuſpenſionis eſt in peripheria globi, vt 5 ad 7.

Scholion I.

IX. Nihil determinati dat expreſſio noſtra pro caſu, quo punctum ſuſpenſionis concipitur eſſe in centro, id eſt, quo globus omni motu progreſſiuo deſtitutus tantum circa axem ſuam gyratur; hoc enim in caſu, quia $a = b$ et proinde velocitas centri nulla (Prop. V.), erit expreſſio noſtra $= \frac{2}{3}$: Vt itaque determinemus vim viuam gyratoriam, vocemus c velocitatem, quae eſt in peripheria globi oſcillantis et erit velocitas centri $= \frac{a+b}{a}c$; hoc valore ſubſtituto pro v in expreſſione noſtra generali, mutatur illa in hanc $\frac{aa + 2ab + \frac{2}{3}bb}{aa} cc M$; iam ſi in hac ponatur $a = -b$, habebitur vis viua gyratorii globi $= \frac{2}{3}ccM$. Eſt adeo vis viua progreſſiua ad vim viuam gyratoriam globi, vt 5 ad 2.

Theorema.

X. *Si in globo oſcillante motus gyratorius ſeparatim conſideretur a motu progreſſiuo et in vtroque motu ſimplici vis viua ſumatur, aggregatum virium viuarum rurſus exhibebit vim viuam oſcillatoriam.*

Demonſtratio.

Sint rurſus diſtantia puncti ſuſpenſionis a ſuperficie globi $= a$, radius $= b$, velocitas centri $= v$, erit (Pr.V.) velo-

velocitas, qua punctum in peripheria circa centrum gyratur, $= \frac{b}{a+b} v$, vis viua gyratoria $= \frac{2bb}{5(a+b)^2} v v M$, (Prop. IX.), vis viua progreſſiua $= v v M$ (Prop. VII); ſumma harum virium viuarum $= \frac{aa+aab+\frac{7}{5}bb}{(a+b)^2} v v M$, qui valor idem eſt, quem antea pro vi viua oſcillatoria inuenimus. (Prop. VI.)

Corollarium.

XI. Licet adeo in globo oſcillante duas vires viuas, nimirum progreſſiuam et gyratoriam ſeparatim conſiderare.

Problema 2.

XII. *Data velocitate duorum corporum* A *et* B, *oſcillando circa puncta* F *et* G *ſe inuicem percutientium, determinare velocitatem quam habebunt poſt colliſionem.* Figura 3.

Solutio.

Sit radius globi $A = A$, ipſius maſſa $= M$, radius alterius globi $= B$, huius maſſa $= N$, diſtantia puncti ſuſpenſionis a globo $A = \alpha$, diſtantia puncti ſuſpenſionis a globo $B = \mathfrak{B}$, velocitas in centro globi $A = m$, velocitas in centro alterius globi $= n$, erit vis viua progreſſiua globi $A = mmM$ atque (Prop. IX.) eiusdem vis viua gyratoria $= \frac{2AA}{5(\alpha+A)^2} mmM$, ſimiliterque vis viua progreſſiua globi $B = nnN$, eiusque vis viua gyratoria $= \frac{2bb}{5(\mathfrak{B}+B)^2} nnN$. Notandum eſt: Quod ponam centra globorum tempore colliſionis eſſe in linea horizontali.

Poſt colliſionem motus gyratorii, quia neuter illorum agit in alterum, non mutabuntur, (id quod deinceps aliter demonſtrabo), fiet ergo ſolum immutatio in motibus progreſſiuis et quidem, iuxta regulas receptas, ita, vt poſt impulſum velocitas progreſſiua corporis A, ſit $\frac{mM-mN+2nN}{M+N}$, velocitas progreſſiua corporis B $=\frac{nN-nM+2mM}{M+N}$, vis itaque viua progreſſiua globi A $=\frac{(mM-mN+2nN)^2}{M+N}M$; huic ſi addatur eiusdem vis viua gyratoria, quam vidimus eſſe $=\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2}mmM$, prodibit ipſius vis viua totalis ſeu oſcillatoria $=(\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2}mm+(\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2)M$; globi vero B vis viua progreſſiua poſt impulſum erit $=(\frac{nN-nM+2mM}{M+N})^2N$, quae addita eiusdem vi viuae gyratoriae dat ipſius vim viuam totalem ſeu oſcillatoriam poſt impulſum $=(\frac{2BB}{5(\mathfrak{B}+B)^2}nn+(\frac{nN-nM+2mM}{M+N})^2)N$.

Dicatur nunc velocitas quaeſita in centro globi A $=v$, velocitas quaeſita in centro globi B $=p$, erit vis viua oſcillatoria globi A poſt impulſum $=\frac{\alpha\alpha+2\alpha A+\frac{7}{5}AA}{(\alpha+A)^2}vvM$, (Prop. VI.) $=$ eidem vi viuae oſcillatoriae poſt impulſum quam modo inuenimus eſſe $=(\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2}mm+(\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2M$. Similiter erit vis viua oſcillatoria corporis B poſt impulſum $=\frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}+2\mathfrak{B}B+\frac{7}{5}BB}{(\mathfrak{B}+B)^2}ppN=(\frac{2BB}{5(\mathfrak{B}+B)^2}nn+(\frac{nN-nM+2mM}{M+N})^2)N$; vnde elicitur $v=\sqrt{(\frac{2AA}{5(\alpha+A)^2+2AA}mm+\frac{5(\alpha+A)^2}{5(\alpha+A)^2+2AA}(\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2}$ et $p=\sqrt{}$

$= V\left(\frac{2BB}{5(\mathfrak{G}+B)^2+2BE}\, n\, n + \frac{5(\mathfrak{G}+B)^2}{5(\mathfrak{G}+B)^2+2BE}\left(\frac{nN-nM+2mM}{M+N}\right)^2\right)$.
Q. E. I.

Corollarium 1.

XIII. Si $\alpha\alpha\mathfrak{G} = \infty$, prodibunt regulae communes pro corporibus ſolo motu progreſſiuo motis; hoc enim caſu erit $v = \frac{mM-mN+2nN}{M+N}$ et $p = \frac{nN-nM+2mM}{M+N}$.

Corollarium 2.

XIV. Si $\alpha\alpha\mathfrak{G} = o$, qui caſus eſt pro corporibus oſcillantibus, in quibus motus gyratorius aequalis eſt motui progreſſiuo, erit $v = V\left(\frac{2}{7}mm + \frac{5}{7}\left(\frac{mM-mN+2nN}{M+N}\right)^2\right)$; et $p = V\left(\frac{2}{7}nn + \frac{5}{7}\left(\frac{nN-nM+2mM}{M+N}\right)^2\right)$.

Scholion.

XV. In Prop. XII. aſſumſimus motus gyratorios duorum corporum oſcillantium ab impulſu non mutari; Iſtud, quia nonnullis ſcrupulum mouere poſſet, ſeorſim nunc demonſtrabimus. Quaeremus impetum corporis oſcillantis & inueniemus eum non eſſe maiorem, quam ſi ſolo motu primo progreſſiuo corpus eſſet motum.

Sit itaque primo planum horizontale CF, ſuſpenſum ex filo verticali AB atque oſcillans in directione CF; Si velocitas puncti A exprimatur per lineam AB, exprimatur velocitas puncti F per lineam BF, ſed haec velocitas, cum habeat directionem obliquam ſecundum FD perpendicularem ad BF, non tota impenditur in impetum; de componenda itaque eſt in FE et DE, quarum Figura 4.

quarum prior ſola impenditur in impetum; Eſt autem (ob triangula ſimilia FED, BAF) FE. FD::BA. BF, ergo velocitas, qua fit impetus puncti F exprimetur per lineam AB, adeoque erit aequalis velocitati puncti A; idem dicendum de omnibus reliquis punctis f, f, plani oſcillantis; eſt ergo totius plani impetus aequalis toti maſſae ductae in velocitatem, quae eſt in puncto A, hinc conſiderari poteſt planum tanquam concentratum in A.

Figura 5. Si iam loco plani habeamus corpus oſcillans, idem erit ac ſi infinita pondera p, p, p, p, concentrata in infinitis punctis virgae rigidae AB oſcillarentur. Vt nunc rem clarius ob oculos ponamus, concipiamus

Figura 6. duo corpora et quidem P et π duabus diuerſis laminis rigidis AB et $\alpha\gamma$ affixa, ſit autem diſtantia corporis P a puncto A dupla v. gr. diſtantiae corporis π a puncto fixo α; impingant haec duo corpora in elaſtra DE, $\delta\varepsilon$ aequalia, diſtantia elaſtri DE a puncto A ſit aequalis diſtantiae elaſtri $\delta\varepsilon$ a puncto α; erit ex natura vectis impetus ponderis P in elaſtrum DE duplus impetus ponderis π in elaſtrum $\delta\varepsilon$ ſi puncta γ et c eadem velocitate moueantur; transferatur nunc pondus π ex γ in c, ita vt eidem virgae AB in medio affixum vna cum pondere P oſcilletur et impingat in commune elaſtrum DE; cum omnia ſint eadem, erit etiam impetus ipſius adhuc dimidio minor impetu ponderis P in elaſtrum DE: ſi nunc pondus P augeatur, vt fiat v. gr. triplum ponderis π, erit impetus ipſius ſextuplo maior impetu huius; vnde apparet eſſe ſingulorum ponderum

derum impetus proportionales ſingulis maſſis ductis in ſuas reſpectiue diſtantias a puncto ſuſpenſionis; ergo ſi infinita ſint pondera, erit ſumma omnium impetuum proportionalis ſummae ſingularum maſſarum ductarum in ſuas reſpectiue diſtantias a puncto ſuſpenſionis, aequalis, vt notum, impetui, quem haberet tota maſſa omnium ponderum, ſi concentrata foret in centro grauitatis. Cum itaque moles globi oſcillantis tanquam punctum conſiderari poſſit, erit eius diſtantia a puncto ſuſpenſionis infinita aſpectu radii, adeoque ratione impetus ſolus motus gyratorius conſiderandus eſt. Q. E. D.

PARS ALTERA.

De Corporibus rotando ſe percutientibus.

Lemma.

XVI. Si globus plano aſpero incedat, eius motus progreſſiuus, ſiue radens, ab aſperitate plani turbabitur, et accedet ei motus gyratorius, hincque orietur motus mixtus; hunc vocabimus *motum rotatorium* atque per *vim viuam rotatoriam* intelligemus vim viuam globi hac ratione moti.

Corollarium.

XVII. Motus itaque rotatorius nihil eſt aliud, niſi iſte motus compoſitus ex progreſſiuo et gyratorio, de quo diximus in Prop. IV. adeoque ſemper reduci poſſet ad motum ſimplicem oſcillatorium, ſi modo quaeratur debitum ſuſpenſionis punctum, circa quod globus oſcillari intelligatur (Prop. IV.)

Definitio.

XVIII. *Rotationem perfectam* voco eam, quae fit cum punctum in circulo maximo ad axem rotationis perpendiculari describit cycloidem vulgarem; sin hoc punctum describat cycloidem contractam vel prolongatam, erit *rotatio imperfecta.*

Scholion 1.

XIX. Si motus perfecte rotatorius tanquam oscillatorius consideratur, erit punctum suspensionis isti motui respondens in superficie globi, hic enim singulis momentis reuera circa punctum in superficie oscillatur, in motu vero non perfecte rotatorio ad oscillatorium reducto, erit punctum suspensionis vel extra peripheriam vel intra eam, prout vel motus progressiuus praeualet vel gyratorius.

Scholion 2.

XX. Si planum super quo globus rotatur sit valde asperum et motus globi lentus, poterit rotatio pro perfecta haberi; sin impetus quo globus propellitur sit maximus, ita vt asperitas plani facile vincatur, motus globi gyratorius pro nullo haberi poterit respectu progressiui.

Scholion 3.

XXI. Ostensa identitate motus rotatorii cum oscillatorio, perfacile erit omnia ea, quae de globis oscillantibus demonstrauimus, iisdem applicare rotantibus.

Pro-

Problema. 3.

XXII. *Data velocitate, quae eſt in centro globi rotantis, vna cum velocitate motus gyratorii, determinare diſtantiam puncti ſuſpenſionis, circa quod ſi globus oſcilletur, motus eius oſcillatorius ſit idem cum priori rotatorio.*

Solutio.

Sit globus ACBD; concipiatur ille rotare per interuallum temporis infinite paruum, ita vt diameter AB veniat in ſitum $\alpha\beta$; haec $\alpha\beta$, continuata ſi opus ſit, priorem AB, etiam continuatam, ſecabit in aliquo puncto F; hoc punctum, quamdiu globus rotauit, nullam habuit velocitatem, ſed manſit immotum, vnde neceſſario punctum ſuſpenſionis debet eſſe in F; vt itaque huius diſtantiam a peripheria globi determinemus, ſit diameter $= 2b$, velocitas in centro $= v$, velocitas gyratoria (quam, vt iam dictum, definio ex velocitate puncti in circulo maximo ad axem rotationis perpendiculari ſumti.) $= c$, diſtantia quaeſita B F $= x$: exprimentur velocitates punctorum A, L, B per arculos infinite paruos $A\alpha$, $L\lambda$, $B\beta$, radiis AF, LF, BF deſcriptos; eſt autem $B\beta = v - c$; vnde $LF(\beta + x) . L\lambda(v) :: BF(x) . B\beta(v-c)$; adeoque $x = \frac{v-c}{c} b$. Q. E I. Figura 7.

Corollarium.

XXIII. Si $c = o$, erit $x = \infty$; ſi, $v = c$, erit $x = o$, id eſt punctum F exiſtet in peripheria globi, ſin $v < C$, erit x negatiuum, cadet nimirum punctum F intra peripheriam, et coincidet quidem cum centro globi ſi $v = o$.

Scholion.

XXIV. Vis viua globi rotantis inuenitur, ſi in valore, quem in Prop. VI. pro vi viua globi oſcillantis elicuimus, ſubſtituatur $\frac{v-c}{c}b$ pro a, manentibus bv, et M iisdem quae antea; eſt ergo vis viua globi rotantis $=(vv+\frac{2}{5}cc)$M.

Corollarium 1.

XXV. Si diſtantia puncti ſuſpenſionis ſit infinita, id eſt, ſi ponatur $c=0$, obtinebitur vis viua globi Mv motu progreſſiuo moti $=vv$M.

Corollarium 2.

XXVI. Vis viua globi perfecte rotantis inuenitur $=\frac{7}{5}vv$M, ponendo nimirum $v=c$.

Corollarium 3.

XXVII. Si $v=0$, erit vis viua globi ſolo motu gyratorio moti $=\frac{2}{5}cc$M.

Scholion 1.

XXVIII. In Prop. X. demonſtratum fuit, ſi in globo oſcillante motus gyratorius ſeparatim conſideretur a motu progreſſiuo, et in vtroque motu ſimplici vis viua ſumatur, fore vt aggregatum virium viuarum rurſus exhibeat vim viuam oſcillatoriam. Idem Theorema verum etiam erit in globo rotante, ſcilicet in hoc quoque aggregatum duarum virium viuarum, progreſſiuae et gyratoriae ſeparatim ſumtarum, rurſus exhibebit vim

vim viuam rotatoriam, quia motus rotatorius idem eſt cum oſcillatorio. Hanc autem velocitatem ipſa expreſſio noſtra ſtatim ob oculos ponit, cum conſtet ex duobus terminis vvM et $\frac{2}{5}ccM$, quorum primus exprimit ipſam vim viuam progreſſiuam, alter vero gyratoriam ſeorſim ſumtam.

Scholion 2.

XXIX. In Prop. XII. ſolutionem dedimus huius Problematis: "Data velocitate duorum corporum oſcil-" lando ſe inuicem percutientium, determinare velocita-" tem quam habebunt poſt collisionem;" ſolutio illa globis rotantibus applicari nequit, nam in globis oſcillantibus punctum ſuſpenſionis, cum ſit fixum, idem manet poſt impulſum, quod ante; in globis vero rotantibus punctum ſuſpenſionis, motui iſti rotatorio reſpondens, cum non ſit fixum ſed imaginarium tantum, non neceſſario idem manet, ſed mutari poteſt et quidem infinitis modis. Vt igitur dictum problema ſolui poſſit, cognitae ſupponi debent diſtantiae punctorum ſuſpenſionis, quae motibus rotatoriis globorum poſt impulſum ſunt reſponſura, ſiue, quod eodem redit, data ſupponi debet ratio, quae poſt impulſum futura ſit inter velocitatem progreſſiuam et gyratoriam vtriusque globi. Hoc praemonito ipſam Problematis ſolutionem in ſequenti dabimus Propoſitione.

Problema 4.

XXX. *Datis in duobus globis* A *et* B *rotando in ſe inuicem impingentibus, velocitate centri vna cum velo-*

citate gyratoria, nec non ratione, quae futura ſit inter has duas velocitates poſt impulſum determinare velocitates, quas habebunt poſt colliſionem.

Solutio.

Fig. 8. Sit maſſa globi $A = M$, radius $= A$, maſſa globi $B = N$, radius $= B$, velocitas in centro globi $A = m$, eius velocitas gyratoria $= c$, ratio inter velocitatem progreſſiuam et gyratoriam poſt impulſum in eodem globo $= \frac{f}{g}$; velocitas in centro globi $B = n$, eius velocitas gyratoria $= e$, ratio inter velocitatem progreſſiuam et gyratoriam, quas habebit poſt impulſum $= \frac{b}{i}$, erit reducto motu rotatorio ad oſcillatorium, debita diſtantia puncti ſuſpenſionis a ſuperficie globi $A = \frac{m-c}{c} A$ (Prop. XII.) atque debita diſtantia puncti ſuſpenſionis a ſuperficie globi $B = \frac{n-e}{e} B$.

Si nunc ea, quae habentur in Propoſitione XII, debite applicentur, inuenietur vis viua rotatoria globi A poſt impulſum $= (\frac{2}{5} cc + (\frac{mM - nN + 2nN}{M+N})^2) M$; globi vero B vis viua $= (\frac{2}{5} ee + (\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2) N$; iſtae vires viuae in vnoquoque globo conſeruabuntur, quomodocunque ab aſperitate plani rurſus mutentur velocitates progreſſiuae et gyratoriae globorum.

Vocetur iam velocitas progreſſiua globi A poſt impulſum $= v$, erit per hyp. eius velocitas gyratoria $= \frac{g}{f} v$ atque (Prop. XXIV.) eiusdem vis viua rotatoria $= \frac{5ff + 2gg}{5ff} vv M$, eſt autem (vti iam vidimus) eadem vis viua

vlua etiam $= (\frac{2}{5}cc + (\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2)M$, ideoque elicitas $v = V\frac{2ccff + 5ff(\frac{mM-mN+2nN}{M+N})^2}{5ff+2gg}$; eodem modo, si vocetur p velocitas progressiua corporis B post impulsum inuenietur $p = V\frac{(2eehh + 5hh(\frac{nN-nM+2mM}{M+N})^2}{5hh+2ii}$). Q.E.I.

Scholion.

XXXI. In Propositione praecedenti generaliter expressimus rationes inter velocitates globorum progressiuas et gyratorias post impulsum per has fractiones $\frac{f}{g}$, $\frac{b}{i}$, in applicatione vero ad casus speciales pro $\frac{f}{g}$ et $\frac{b}{i}$ substituendae erunt rationes quae maxime videbuntur probabiles; v. gr. si globi admodum lente moueantur super plano aspero, erit rotatio sensibiliter perfecta (Prop. XX.) et singulae harum fractionum $\frac{m}{c}$, $\frac{f}{g}$, $\frac{n}{e}$ et $\frac{b}{i}$ aequales erunt vnitati. Hunc casum quia est frequentissimus, in sequenti propositione seorsim tractabimus.

Problema 5.

XXXII. *Data velocitate duorum globorum* A *et* B, *rotando se inuicem percutientium, determinare velocitates, quas habebunt post impulsum positis globis tam ante quam post collisionem perfecte rotantibus.* Fig. 8.

Solutio.

Positis iisdem, quibus in Prop. XXX, nisi quod sit $m = c$, $n = e$, $f = g$ et $b = i$; erit vis viua globi A post impul-

impulſum $= \frac{2}{5} vv M$ (Prop. XXVI.), eſt autem eadem vis viua etiam $= (\frac{2}{5}mm + (\frac{mM - mN + 2nN}{M+N})^2) M$ (Prop. XXX.) habetur itaque $v = V(\frac{2}{7}mm + \frac{5}{7}(\frac{nN - mN + 2nN}{m+N})^2)$; ſimiliter inuenitur $p = V(\frac{2}{7}nn + \frac{5}{7}(\frac{nN - nM + 2mM}{M+N})^2)$. Q. E. I.

Corollarium 1.

XXXIII. Si maſſae globorum A et B fuerint inter ſe aequales erit $v = V(\frac{2}{7}mm + \frac{5}{7}nn)$ et $p = V(\frac{2}{7}nn + \frac{5}{7}mm)$.

Corollarium 2.

XXXIV. Si vterius globus B ponatur quieuiſſe ante colliſionem, erit $v = mV\frac{2}{7}$ et $p = mV\frac{5}{7}$.

Scholion 1.

XXXV. Hinc apparet, ſi in ludo *Billard* alter globorum in alterum quieſcentem perfecte rotando impingat, priorem non eſſe quieturum, ſed fore vt ambo moueantur, et quidem ea lege vt impingens retineat velocitatem, quae ſit ad velocitatem alteri acquiſitam, vt $V2$ ad $V5$; quod ſi globi impingentis rotatio ſit imperfecta, retinere quidem debet aliquam velocitatem, ſed minorem ac ſi perfecte rotaſſet; haecque ab experientia confirmantur; hinc eſt quod huius ludi periti globum ſuum magno propellant impetu, ſi colluſoris globus prope lacunam in linea recta ſit poſitus; hoc enim pacto leges ordinariae obtinent, (Prop. XX.) atque globi impingentis motus ipſo impulſu ſiſtitur, globusque alter ſolus in lacunam intruditur, id quod non fieret niſi impingens celerrime fuiſſet motus.

Scho-

Scholion 2.

XXXVI. Aliorum praeterea phaenomenorum, in eodem ludo *Billard* occurrentium, ratio reddi poterit, conſiderato ea qua fecimus ratione, motu duplici, progreſſiuo et gyratorio.

Obſeruatur v. gr. globum, digito preſſum hocque modo propulſum, primum quidem aliquantum antrorſum, dein vero retrorſum moueri; huius ratio eſt, quod digitus propellens globum ſimul eum retrahat ſicque ei imprimat duplicem motum, alterum progreſſiuum antrorſum, alterum gyratorium in ſenſum contrarium, prior ab initio poſteriori praeualet, ſed propter aſperitatem plani breui extinguitur, et ſic illo extincto hoc autem remanente, globus retro mouetur: idem vero non accidit, ſi digitus propellens globum madefiat. Porro obſeruatur directiones globorum poſt impulſum ad ſe inuicem non eſſe perpendiculares: hic iterum conſiderandum eſt, globum impingentem ante colliſionem habere motum duplicem, progreſſiuum et gyratorium; poſterior, quia, vt ſaepius dictum, non mutatur, retinet poſt impulſum eandem directionem, quam habuit ante: prior vero, nimirum progreſſiuus, poſt colliſionem tendit ſecundum perpendicularem ad directionem alterius globi, ſed propter aſperitatem panni accedet inſuper globo motus gyratorius ſecundum eandem directionem; habebit ergo globus motum triplicem et ex hoc motu triplici neceſſario oriri debet motus ſimplex rotatorius ſecundum directionem aliquam interme-

diam, hinc manifeſte directiones globorum poſt impulſum conſtituent angulum aliquantum acutum, eoque magis acutum, quo motus fuerit lentior.

Vnum adhuc referam phaenomenon, primo haud abſimile quodque eodem modo explicandum eſt, quo illud: ſi globus quieſcens vni ex lateribus ſit adhaerens (quod Galli vocant *être collé*) et alter in eum ita impingat, vt centra ſint in linea perpendiculari ad latus, cui prior adhaeret, fiet vt poſt impulſum globus impingens per eandem perpendicularem aliquantum reſiliat et dein vel ſubito quieſcat vel retro moueatur; ratio huius, vt dixi, manifeſta eſt iis quae habentur ab initio huius ſcholii; quodſi vero impulſus fuerit obliquus, poterit fieri, vt globus impingens poſt colliſionem primum aliquantum reſiliat, dein per lineam curuam rurſus retro moueatur, ſeque in lacunam voluat, quia tunc directio motus gyratorii non e diametro eſt oppoſita directioni motus progreſſiui; hocque etiam ſaepiſſime accidere ſolet.

OBSER-

PROBLEMATIS ASTRONOMICI

A

Clar. De L' Isle

PROPOSITI

ENVCLEATIO.

AVTORE

Georg. Wolffg. Krafft.

Lemma I.

I.

POsito sinu toto = 1, anguli acuti maioris sinu = S, cosinu = C, Tangente = T; anguli vero acuti minoris sinu = s, cosinu = c, tangente = t; semisummae horum duorum angulorum sinu = A cosinu = B; semidifferentiae sinu = a, cosinu = b. Erit Tabula III.

1. Cosinus anguli compositi ex vtroque dato = $Cc - Ss$
2. Sinus anguli residui = $Sc - sC$.
3. Tangens anguli residui = $\frac{T-t}{Tt+1}$.
4. $c - C = 2aA$.
5. $S - s = 2aB$.
6. $S + s = 2Ab$.
7. Sinus anguli dupli = $2SC$.
8. Cosin. anguli residui = $Cc + sS$.

Demonstrationes horum omnium vide in Comment. huius Academiae Tomo II. p. 13. seq.

Lemma 2.

Fig. 1. II. In Schemate Fig. 1. repraeſentet TZF planum Meridiani, TRF planum Horizontis, BDH planum Parralleli, in quo ſtella quaedam D mouetur. Exponet itaque angulus CGD diſtantiam ſtellae D a Meridiano, in Aequatore, quam vocabo tempus; angulus PKM vero diſtantiam ſtellae D a Meridiano, in Horizonte, ſeu Azimuthum. *Inuenienda eſt ratio, quam habet Tempus ad Azimuthum.* Sit in hunc finem angulus Temporis CGD acutus, atque erit in triangulo CGD ad C rectangulo, ſin. tot. (1) tang. CGD = CG:CD, hinc tang. CGD = $\frac{CD}{CG}$; in triangulo PKM ad P rectangulo, erit rurſus, ſin. tot. (1): tang. PKM = PK:PM, hinc tang. PKM = $\frac{PM}{PK}$; itaque erit tangens Azimuthi ad tang. Temporis = CG:PK, ob CD = PM, reſtat itaque inueſtiganda haec ratio. Ponantur

Eleu. aequat. ſin. = a. Temp. ſin. = α. Declin. ſin. = A.
coſinus = b. coſin. = $\mathfrak{G}$. coſin. = B.
tangens = c. tang. = γ. tang. = C.

et praeterea altitudinis Meridianae in B coſinus AK = q. Erit, ob altitudinem meridianam = alt. aequatoris + vel − declinatione, per Lemmatis 1. num. 1 et 8. $q = B\mathfrak{b} - A\mathfrak{a}$, ſi declinatio ſit Borealis, ſed $B\mathfrak{b} + A\mathfrak{a}$, ſi eadem ſit Auſtralis. Deinde in triangulo CGD eſt ſin. tot. (1):DG(B) = cof. CGD($\mathfrak{G}$):CG = B$\mathfrak{G}$; nec non in triangulo EBC, ſin. tot. (1):BC(B − B$\mathfrak{G}$) = ſin. EBC(b):EC = AP = B$\mathfrak{b}$ − B$\mathfrak{b}\mathfrak{G}$; hinc CG:PK = CG:AK − AP = B$\mathfrak{G}$: q − B$\mathfrak{b}$ + B$\mathfrak{b}\mathfrak{G}$ = B$\mathfrak{G}$: B$\mathfrak{b}\mathfrak{G}$ ∓ A$\mathfrak{a}$,

(vbi

(vbi ſemper ſuperius ſignum valet pro Declinatione Boreali, inferius vero pro Auſtrali) $= \mathfrak{C} : b\mathfrak{C} \mp \frac{Aa}{B} = \mathfrak{C} : b\mathfrak{C} \mp Ca$, ob $C : 1 = A : B$. Igitur ratio quaeſita eſt ipſius $\mathfrak{C}$ ad $b\mathfrak{C} \mp Ca$, atque hinc Tangens Azimuthi, pro angulo Temporis acuto $\frac{\mathfrak{C}\gamma}{b\mathfrak{C} \mp Ca} = \frac{\alpha}{b\mathfrak{C} \mp Ca}$, ob $\gamma : 1 = \alpha : \mathfrak{C}$. Quodſi vero angulus Temporis ſit obtuſus, vt in Fig. 2. ſumatur eius deinceps poſitus CGD, atque huius ſit ſinus α, coſinus $\mathfrak{C}$, tangens γ, erit pro hoc caſu anguli, qui Azimutho AKM deinceps poſitus eſt, Tangens $= \frac{\alpha}{b\mathfrak{C} \mp Ca}$. In ſequentibus vero ſemper aſſumam Declinationem eſſe Borealem, quare adhibendae ſunt Formulae pro angulo temporis acuto $\frac{\alpha}{b\mathfrak{C} - Ca} =$ tang. Azimuthi; pro angulo Temporis autem obtuſo erit $\frac{\alpha}{b\mathfrak{C} + Ca} =$ tang. anguli, qui deinceps poſitus eſt Azimutho. Q. E. I.

Problema.

III. *Ex obſeruatis tribus Temporibus* ZPA, ZPB, ZPC *in Fig.* 3. *ſtellae alicuius, ita vt in obſeruatione inter vtramque media ſtella ſit in ipſo verticali primario* ZB, *in vtraque altera vero ab hoc aequaliter remota, inuenire Altitudinem Poli.* Ad naturam huius Problematis excutiendam ponantur Figura 3.

Temporis ZPA ſinus $= e$ coſin. $= f$ Eleu. Aequ. ſin. $= y$
ZPB ſinus $= g$ coſin. $= b$ coſin. $= V(1-yy)$
CPQ ſinus $= i$ coſin. $= k$. Declin. tang. $= u$.

Habebitur per Lemma 2. Tangens $DZA = \frac{e}{f\sqrt{(1-yy)} - uy}$, ſuppoſito angulo ZPA acuto, qui nunquam alius eſſe poteſt, porro erit Tang. $DZB = \frac{g}{b\sqrt{(1-yy)} - uy}$, ſuppoſi-

to rurſus angulo ZPB acuto, qui etiam nunquam alius eſſe poteſt; denique erit Tangens CZQ, qui Azimutho DZC eſt deinceps poſitus, $= \frac{i}{k\sqrt{(1-yy)}+uy}$, vbi aſſumitur angulus CPQ ob angulum ZPC fere ſemper obtuſum. Factis his denominationibus, ob DZB rectum, erit tangens $\frac{g}{h\sqrt{(1-yy)}-uy}$ infinite magna, quare fractionis huius nominator $h\sqrt{(1-yy)}-uy =$ nihilo, vnde fit $uy = h\sqrt{(1-yy)}$; ob aequales autem AZB, BZC, et DZB rectum, aequales erunt etiam DZA, CZQ, quorum tangentes antea inuentae, ſi aequentur, facta ſubſtitutione ipſius $h\sqrt{(1-yy)}$ pro uy, emerget aequatio $if\sqrt{(1-yy)} - ih\sqrt{(1-yy)} = ek\sqrt{(1-yy)} + eh\sqrt{(1-yy)}$, quae, cum per incognitam $\sqrt{(1-yy)}$ diuiſibilis ſit, manentibus ſolis quantitatibus cognitis $if-ih = ek+eh$ indicat, quaeſitum ex his datis non poſſe inueniri, conſequenter Problema impoſſibile eſſe ſolutu.

Corollarium 1.

IV. Si differentia Azimuthorum intelligatur data, Problema ſolui poterit, ſed ſuperfluus erit hoc caſu angulus aliquis Temporis, ex. gr. ZPC. Poſita enim cotangente ipſius AZB$=m$, erit ex prioribus $m = \frac{e}{f\sqrt{(1-yy)}-uy}$ $\frac{e}{(f-h)\sqrt{(1-yy)}}$, vnde oritur $\sqrt{(1-yy)}$, ſinus Eleuationis Poli $= \frac{e}{(f-h)m}$, quae formula facile ad logarithmos deducitur, conſiderando, quod $f-h$ ſit differentia coſinuum ZPA et ZPB, ponendo igitur ſin. $\frac{ZPB+ZPA}{2} = \eta$, et ſin. $\frac{ZPB-ZPA}{2} = \Phi$, erit per Lemma 1. num. 4. $f-h = 2\Phi\eta$, quod in priori formula ſubſtitutum efficit ſin. Eleu. Poli $= \frac{eR^3}{2\Phi\eta m}$, multiplicato numeratore per cubum radii

radii R, ad complendas dimenſiones. Ergo log. ſin. Eleu. Poli $= 3lR + le - (l2 + l\Phi + l\eta + lm)$. Sit e.g. $ZPA = 31^\circ 24'$. $ZPB = 75^\circ 26'$. $AZB = 45^\circ 0'$. erit $\frac{ZPA+ZPB}{2} = 53^\circ 25'$. $\frac{ZPB-ZPA}{2} = 22^\circ 1'$. vnde talis emergit operatio:

$l2 =$	0. 3010300
$l\Phi =$	9. 5738880
$l\eta =$	9. 9047106
$lm =$	10. 0000000
	29 7796286
$3lR + le =$	39. 7168458
	9. 9372172 log. ſinus Eleuat. Poli.

cui reſpondent $59^\circ 56'$. pro Eleuatione Poli, ad quam exemplum fuit adaptatum.

Corollarium 2.

V. Quoniam ſupra poſt factam diuiſionem per $V(1-yy)$ remanet aequatio haec $if - ih = ek + eh$, poteſt aſſumi quaelibet harum cognitarum pro incognita, atque exinde nouum Problema ſolui; quaeratur ex. gr. h, erit ea $= \frac{fi-ke}{e+i}$, eritque Problema hoc: *Datis temporibus, quibus ſtella aliqua fuit in duobus verticalibus a primario aequaliter remotis, inuenire tempus, quo fuit in Verticali primario.* Sit autem ſin. $(CPQ - ZPA) = \alpha$, erit per Lemma 1. num. 2. $fi - ke = \alpha$; ſit porro ſin. $\frac{CPQ+ZPA}{2} = \beta$, coſin. $\frac{CPQ-ZPA}{2} = \gamma$, et huius ſemidifferentiae ſinus $= \delta$, erit per Lemma 1. num. 6. $e + i = 2\beta\gamma$; deinde quia $CPQ - ZPA$ duplus eſt ſemidifferentiae $\frac{CPQ-ZPA}{2}$, erit quo-

quoque $\alpha = 2\gamma\delta$, factis his substitutionibus erit $b = \frac{\delta}{\mathfrak{e}}$, aut $b = \frac{\delta R}{\mathfrak{e}}$ ad complendas dimensiones, vnde $lb = lR + l\delta - l\mathfrak{e}$. Sit in allegato exemplo $ZPC = 129^{\circ}.40'$, erit $CPQ = 50^{\circ}.20'$, vnde operatio haec est:

$lR + l\delta = 19.2160967$

$l\mathfrak{e} = 9.8157776$

9.4003191. log. cosin. ZPB,

cui respondent in Tabulis pro angulo ZPB $75^{\circ}.26'$. qualis antea fuit in Corollario praeced.

Corollarium 3.

VI. Cum insperatum id accidisset, vt Problema per data sua non determinaretur, inquisiui in causam huius rei, atque eum in finem Problema generalius concepi, vt nempe angulus DZB non sit rectus, sed alius quicunque datus acutus, cuius tangens $= m$. Erit ergo ex prioribus, suppositis angulis omnibus ZPA, ZPB, ZPC, acutis, vocatisque $\sqrt{(1-yy)} = x$, $f - h = p$, $h - k = q$, $uy = \frac{mbx-g}{m}$, tang. $DZA = \frac{me}{g+pmx}$, tang. $DZC = \frac{mi}{g-qmx}$, hinc per Lem. 1. n. 3. tang. $AZB = (mg - me + pmx) : (me + g + pmx)$, nec non tang. $BZC = (mi - mg + qmx) : (mi + g - qmx)$, qui duo valores aequati, praebent aequationem Quadraticam hanc: $-mmig - pmmix - 2gg + ge - 2gpmx + 2gqmx - eqmx + 2pqmmxx + 2mmei - mmeg + qemmx + gi + pimx = 0$. Quodsi ergo DZB ponatur rectus, euadet m infinite magna, quare omnes termini, in quibus aut non reperitur m, aut non adest mm, abiicientur, quo facto oritur $pmmix = qemmix$, vnde patet cur aequatio superius inuenta per incognitam sit diuisibilis.

OB-

OBSERVATIONES ARITHMETICAE DE SEPTENARIO,

AVTORE
G. W. Krafft.

§. 1.

NOtiſſimae ſunt Arithmeticorum regulae de inueniendo numeri cuiuscunque diuiſore ſimplici, quas tradunt, vbi de Fractionibus ad minores terminos reducendis agunt. Extenduntur illae ad omnes numeros ſimplices, excepto vnico ſeptenario; id quod anſam praebuit *Adriano Metio Arithm. Practicae Cap.* 19. dicendi: *Septenarius, cuius numeri menſura ſit, nulla alia via certius explorari poteſt, quam diuiſione ipſa.* Inueni tamen regulas etiam pro ſeptenarii multiplo dignoſcendo in duobus auctoribus, quarum vtramque examinabo; adiuncturus deinde nouam, in quam ipſe ante complures annos caſu incidi.

§. 2. Prima eſt *Mich. Stifelii*, in *Arithm. Integra, Lib. I. Cap.* 2. vbi haec leguntur: *Septenarius quemlibet numerum componit, et numerat, qui colligitur ex tribus, ſex, nouem, aut duodecim, terminis proportionalitatis duplae, quadruplae, aut ſedecuplae.* Quamuis autem videatur hanc obſeruationem ad enumeratos ſolos hos modulos reſtringere: facile tamen demonſtrari poteſt, generaliter hoc verum eſſe, de quibuscunque terminis harum progreſſio-

num ſibi inuicem immediate ſuccedentibus, quorum numerus eſt $3e$; et de Proportionalitatibus, quarum denominator generalis eſt 2^{2p}. Nam ſit Progreſſionis cuiuscunque Geometricae terminus primus $= a$, denominator $= m$, numerus terminorum $= n$; erit ſumma horum terminorum $= \frac{(m^n - 1)a}{m-1}$; iam vero in allegato caſu fit $a = 2^r$, poſito r pro numero quocunque integro; proportionalitas enim, de qua loquitur *Stifelius*, à quacunque potentia binarii incipere poteſt; n vero abit in $3e$, poſito iterum e pro numero quocunque integro; et m in 2^{2p}; ergo generaliter multiplus ſeptenarii debet eſſe numerus quicunque expreſſus per $\frac{(2^{2p \cdot 3e} - 1)2^r}{2^{2p} - 1}$; cum vero 2^r nunquam ſit multiplus ſeptenarii, neceſſe eſt, vt hoc multiplum contineatur in formula $2^{2p \cdot 3e} - 1$, $= 8^{2p \cdot e} - 1$. Iam vero notum eſt, quod generaliter $a^n - 1$ ſemper admittat diuiſorem $a - 1$; poſitis nempe a et n numeris integris; patet ergo, formulam modo allegatam $8^{2p \cdot e} - 1$ diuiſibilem ſemper fore per $8 - 1$, hoc eſt, per ſeptenarium. Et facile hinc concluditur, idem applicari poſſe ad alios quoque diuiſores ſimplices numerorum quorumuis inueſtigandos Verum enim vero quia nihil commoditatis exinde fluit, quam tamen vnicam Arithmetici hoc in negotio quaerunt, hanc extenſionem non proſequar.

§. 3. Alteram regulam tradit in Arithmetica Germanice edita Anno 1591. Vlmenſis quondam Arithmeticus, *Iohannes Krafft*, quae ſequentibus continetur praeceptis.

ceptis. Examinandus ſit numerus 8641975230 an ſit multiplus ſeptenarii. Aſſumantur in hunc finem numeri conſtantes 1. 3. 2. 6. 4. 5. 1. 3. 2. 6. 4. 5. 1. etc. quos Inſtrumentales vocat, et ſubſcribantur numero propoſito hunc in modum:

1 2 0
8 6 4 1 9 7 5 2 3 0
6 2 3 1 5 4 6 2 3 1

à propoſiti numeri notis abiiciatur ſeptenarius, vbicunquae id fieri poteſt, et reſidui numeri ſuperimponantur; multiplicetur deinde quilibet Inſtrumentalis cum ſuo ſuperiori, et abiectis ſeptenariis à factis hisce particularibus, quotiescunque fieri id poteſt, horum ſumma indagetur; vt in hoc exemplo, $0+2+4+2+0+3+1+5+5+6=28$, haec ſumma cum ſit per 7 diuiſibilis: concludendum eſt etiam, propoſitum numerum ſeptenarii multiplum fore. Vel breuius ſic enunciatur regula, omiſſa abiectione ſeptenariorum, quae compendio tantum inſeruit: multiplicetur quilibet Inſtrumentalis cum digito ſuo ſuperimpoſito, et facta haec particularia addantur; quorum ſumma ſi per ſeptem diuidi poſſit, etiam propoſitus numerus erit multiplus ſeptenarii. Demonſtratio autem habetur ſequens. Sit numerus propoſitus huius formae, vtpote in quam formam generalem, extenſam ſi neceſſe ſit, omnes numeri cogi poſſunt:

$1000000a+100000b+10000c+1000d+100e+10f+g$
$999999a+99995b+9996c+994d+98e+7f+0$;

numerus inferior eſt multiplus ſeptenarii, et in ſuperiore literae a, b, c, d, e, f, g, denotant digitos nu-

meri propoſiti, adiectis tot cyphris, quot requirit valor eorum localis. Subtracto hoc ab illo, reſiduum fit ſequens: $1a+5b+4c+6d+2e+3f+1g$; ſi itaque hoc reſiduum ſit diuiſibile per 7, etiam integer numerus propoſitus talis erit. Sed ex hoc reſiduo clare apparet, digitos numeri propoſiti multiplicandos eſſe per ſuos reſpectiuos Inſtrumentales modò indicatos, et videndum, an ſumma ſingulorum horum factorum ſit diuiſibilis per 7. Conſtat ergo veritas huius regulae, ſed paruum exinde ſperandum compendium; citius enim numerus propoſitus ipſe per Septenarii diuiſionem tentatur, quam haec praxis abſoluitur.

§. 4. Neque diffiteor, quod idem diſpendium meam quoque premat regulam, quam nihilominus prioribus adiungam. Quomodo autem ea ſe habeat melius primùm exemplo oſtenſurus ſum. Sit propoſitus numerus 161 examinandus an per 7 diuidi queat. Accipio notam dextimam 1, quae ſi per 3, quem ſemper adhibeo, diuidi poſſit, eam diuido; ſi nequeat, tum à notâ proximâ ſiniſteriore ſumo tot decades, quot neceſſariae ſunt ad ternarii multiplum conſtituendum, id quod ſemper fieri poteſt, cuilibet enim digito poteſt adiungi numerus aliquis decadum, vt multiplum ternarii exſurgat; et in praeſenti exemplo 2; igitur 21 diuiſa per 3, praebent Quotum 7, huic adiungo $16-2=14$, oritur $7+14=21$; quod cum ſit multiplum ſeptenarii: concludo, etiam propoſitum 161 talem eſſe. Schemata quoruudam exemplorum, cum ſuis compendiis, hic ſubiicio:

1736

$1736^{(3} 2 + 173 = 175^{(3} 5 + 16 = 21.$
$1617^{(3} 9 + 159 = 168^{(3} 6 + 15 = 21.$
$14^{(3} 8 + 1 - 2 = 7.$
$21^{(3} 7 + 2 - 2 = 7.$
$543^{(3} 1 + 54 = 55^{(3} 5 + 4 = 9.$

Cuius operationis vt reddam rationes, assumo numerum quemcunque $a+b$, ita tamen vt b designet assumti numeri digitum primum, siue in loco vnitatum positum. Ponatur deinde digitus c talis, vt $10c+b=3m$, dico, si fuerit $\frac{1}{10}a-c+m=7n$, numeri propositi $a+b$ mensuram fore septenarium. Nam ex posteriori aequatione deducitur $a=70n+10c-10m$, ex priori oritur $b=3m-10c$, ergo numerus propositus $a+b$ abit in hunc, factis substitutionibus, $70n+10c-10m+3m-10c=70n-7m$, qui omnino est multiplus septenarii. Idem vt exemplo numerico illustretur, ponam examinandum esse numerum 1617, erit itaque $1617=1610+7$, ergo $a=1610$, $b=7$. Assumo deinde digitum talem $2=c$ (erit enim c semper vnus ex his tribus digitis 0, 1, 2,) vt $10c+b=3m$, hoc est in hoc exemplo $10.2+7=3.9$ vnde $m=9$; si itaque fuerit $\frac{1}{10}a-c+m=7n$, numerus propositus erit multiplus septenarii. Est autem omnino $161-2+9=168=7.24$, vnde $n=24$; et quia Quotus numeri dati per 7 diuisi generaliter est $10n-m$, erit is in hoc casu $=240-9=231$. Quodsi vero cuidam non appareat numerum 168 esse multiplum septenarii, operatio antecedens cum hoc numero 168 repetenda erit.

SOLVTIO PROBLEMATIS ARITHMETICI DE INVENIENDO NVMERO QVI PER DATOS NVMEROS DIVISVS, RELINQVAT DATA RESIDVA.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

REperiuntur in vulgaribus arithmeticorum libris paſſim huiusmodi problemata, ad quae perfecte reſoluenda plus ſtudii et ſollertiae requiritur quam quidem videatur. Quamuis enim plerumque regula ſit adiecta, cuius ope ſolutio obtineri queat, tamen ea vel eſt inſufficiens ſolique caſui propoſito conuenit, ita vt circumſtantiis quaeſtionis parum immutatis, ea nullius amplius ſit vſus; vel ſubinde etiam ſolet eſſe falſa, Ita quadratorum magicorum conſtructio iam pridem ab arithmeticis eſt tradita; quae autem cum eſſet inſufficiens maiora ingenia *Labirii* et *Sauuerii* ad perficiendum requiſiuit. Simili quoque modo vbique fere ocurrit iſtud problema, vt inueniatur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, et 6 diuiſus relinquat vnitatem, per 7 vero diuidi queat ſine reſiduo: methodus vero idonea ad huius modi problemata ſoluenda nusquam exhibetur; ſolutio

tio enim ibi adiecta in hunc tantum casum competit, atque tentando potius absoluitur.

§. 2. Si quidem numeri, per quos quaesitus numerus diuidi debet, sunt parui, prout in hoc exemplo, tentando non difficulter quaesitus numerus inuenitur; difficillima autem foret istiusmodi solutio, si diuisores propositi essent valde magni. Cum itaque ad huius generis problemata soluenda methodus etiamnum habeatur nulla genuina, quae ad magnos diuisores aeque pateat, ac ad paruos; non inutiliter operam meam collocatam esse confido, dum in huiusmodi methodum inquisiui, qua sine tentatione pro maximis etiam diuisoribus talia problemata resolui queant.

§ 3. Quo igitur, quae hac de re sum meditatus, distincte exponam, a casu incipio simplicissimo, quo vnicus tantum datur diuisor, numerusque quaeritur, qui per illum diuisus datum relinquat residuum. Requiratur scilicet numerus z, qui per numerum a diuisus relinquat p pro residuo. Huius quidem quaestionis solutio est facillima, erit enim $z = ma + p$, denotante m numerum quemcunque integrum; interim tamen obseruari conuenit hanc solutionem esse vniuersalem, omnesque numeros satisfacientes complecti. Praeterea ex ea quoque intelligitur, si vnus habeatur numerus satisfaciens, ex eo innumerabiles alios satisfacientes quoque posse inueniri, dum ille numerus quocunque multiplo ipsius a vel augeatur, vel si fieri potest, minuatur.

Erit

Erit autem p seu $0a+p$ minimus numerus satisfaciens, hunc excipit $a+p$, quem porro sequuntur $2a+p$, $3a+p$, $4a+p$, etc. qui numeri omnes constituunt, progressionem arithmeticam differentiam constantem habentem a.

§. 4. Hoc exposito sequitur casus, quo duo diuisores cum suis residuis proponuntur, qui est praecipuus, et sequentes omnes in se complectitur. Nam quotcunque propositi fuerint diuisores, quaestio semper ad hunc casum, quo duo tantum proponuntur, reduci poterit, quemadmodum in sequentibus monstrabo. Quaeri igitur oporteat numerum z, qui per a diuisus relinquat p, per b vero diuisus relinquat q; sitque numerus a maior numero b. Cum ergo numerus quaesitus z ita debeat esse comparatus vt per a diuisus relinquat p, necessario in hac forma $ma+p$ continebitur, eritque idcirco $z=ma+p$. Deinde ex altera conditione, qua z per b diuisus relinquere debeat q, erit $z=nb+q$. Quamobrem, cum sit $ma+p=nb+q$, determinari debebunt numeri integri loco m et n substituendi, vt sit $ma+p=nb+q$, quibus inuentis erit $ma+p$ seu $nb+q$ numerus quaesitus z.

§. 5. Quia ergo est $ma+p=nb+q$, erit $n=\frac{ma+p-q}{b}$ seu posito $p-q=v$, erit $n=\frac{ma+v}{b}$. Hanc ob rem definiri oportet numerum m, vt $ma+v$ diuidi possit sine residuo per b. Quia est $a>b$ ponatur $a=\alpha b+c$; erit $n=m\alpha+\frac{mc+v}{b}$; oportet ergo vt $mc+v$

$+v$ diuisionem per b admittat; sunt autem α et c numeri cogniti, qui reperiuntur ex diuisione ipsius a per b; erit enim α quotus et c residuum. Ponatur porro $\frac{mc+v}{b} = A$, erit $m = \frac{Ab-v}{c}$; quare numerum A inueniri oportet, vt $Ab-v$ diuidi queat per c. Si eueniat, vt v per c diuidi possit, operatio iam poterit finiri; sumto enim $A = o$, erit $m = -\frac{v}{c}$ et $z = -\frac{\alpha v}{c} + p$ quae expressio, etiamsi euadat negatiua, tamen ad infinitos numeros affirmatiuos pro z inueniendos est idonea.

§. 6. Sin autem v per c non potest diuidi, quo $\frac{Ab-v}{c}$ fiat numerus integer, pono $b = \mathfrak{B}c + d$, seu diuido b per c, dicoque quotum $= \mathfrak{B}$ et residuum $= d$. Quo facto erit $\frac{Ab-v}{c} = A\mathfrak{B} + \frac{Ad-v}{c} = m$, debebitque $\frac{Ad-v}{c}$ esse numerus integer sit is $= B$, fiet $A = \frac{Bc+v}{d}$. Si nunc v per d diuidi poterit, facio $B = o$, eritque $A = \frac{v}{d}$, et $m = \frac{\beta v}{d}$. Sin autem v per d non est diuisibile, pono porro $c = \gamma d + e$; eritque $A = B\gamma + \frac{Be+v}{d}$. Atque pono $\frac{Be+v}{d} = C$ ut sit $B = \frac{Cd-v}{e}$. Si nunc v per e diuidi poterit, pono $C = o$ eritque $B = -\frac{v}{e}$, et $A = -\frac{\gamma v}{e}$ atque $m = -\frac{\beta\gamma v}{e} - \frac{v}{e}$; sin $\frac{v}{e}$ nondum fuerit integer numerus, pono $d = \delta e + f$, eritque $B = C\delta + \frac{Cf-v}{e}$; atque facio $\frac{Cf-v}{e} = D$, ut sit $C = \frac{De+v}{f}$, vbi videndum est vtrum v per f diuidi possit an secus, atque in vtroque casu vt supra operatio debet institui.

§. 7. Quia autem $a > b$, atque $b > c$ et $c > d$ etc. hac ſerie a, b, c, d, e, f, etc. continuanda perpetuo ad minores numeros deuenitur, ita vt tandem ad tam paruum perueniri oporteat, qui ſit pars aliquota ſeu diuiſor ipſius v. Sunt autem c, d, e, f etc. continua reſidua ordinariae operationis, qua maximus communis diuiſor ipſorum a et b inueſtigari ſolet, quam operationem hic appono.

$$\begin{array}{lll}
n = \frac{ma+v}{b} & b \,|\, a \,|\, \alpha & a = \alpha b + c \\
n = \frac{Ab-v}{c} & c \,|\, b \,|\, \beta & b = \beta c + d \\
A = \frac{Bc+v}{d} & d \,|\, c \,|\, \gamma & c = \gamma d + e \\
B = \frac{Cd-v}{e} & e \,|\, d \,|\, \delta & d = \delta e + f \\
C = \frac{De+v}{f} & f \,|\, e \,|\, \varepsilon & e = \varepsilon f + g \\
D = \frac{Ef-v}{g} & g \,|\, f \,|\, \zeta & f = \zeta g + h \\
E = \frac{Fg+v}{h} & h \,|\, g \,|\, \eta & g = \eta h + i \\
F = \frac{Gh-v}{i} & i \,|\, h \,|\, \vartheta & h = \vartheta i + k \\
G = \frac{Hi+v}{k} & k &
\end{array}$$

§. 8. Haec ergo operatio, qua ad maximum communem diuiſorem numerorum a et b vti ſolemus, eousque eſt continuanda, donec ad reſiduum perueniatur, quod diuidat v. Quo inuento ſequenti modo inueſtigabimus numerum m. Si v iam per b diuidi poterit, fiet $m = o$. Si v per c diuiſionem admittat, fiet $A = o$ et $m = \frac{v}{c}$. Si v per d diuidatur, fiet $B = o$ et $A = \frac{v}{d}$ atque $m = \frac{bv}{cd} - \frac{v}{c} = \frac{\mathfrak{B}v}{d}$ ob $b = \mathfrak{B}c + d$. Quo autem valores ipſius m facilius reperiantur primo valor ipſius A per

A per B, tum valor ipſius B per C et ita porro exprimi debet, vnde nata eſt iſta tabula.

1. $m = \frac{Ab - v}{c}$,
2. $m = \frac{Bb + \mathfrak{C}v}{d}$
3. $m = \frac{Cb - v(1 + \mathfrak{C}\gamma)}{e}$
4. $m = \frac{Db + v(\delta + \mathfrak{C}\gamma\delta + \mathfrak{C})}{f}$
5. $m = \frac{Eb - v(\delta\varepsilon + \mathfrak{C}\gamma\delta\varepsilon + \mathfrak{C}\varepsilon + \mathfrak{C}\gamma + 1)}{g}$
6. $m = \frac{Fb + v(\delta\varepsilon\zeta + \mathfrak{C}\gamma\delta\varepsilon\zeta + \mathfrak{C}\varepsilon\zeta + \mathfrak{C}\gamma\zeta + \zeta + \delta + \mathfrak{C}\gamma\delta + \mathfrak{C})}{h}$ etc.

De his valoribus eſt notandum, ſigna ipſius v alternari hoc modo $- + - + - +$ etc. Deinde coefficientes ipſius v hanc tenent legem:

$\mathfrak{C}$ γ δ ε ζ

$1, \mathfrak{C}, \mathfrak{C}\gamma + 1, \mathfrak{C}\gamma\delta + \delta + \mathfrak{C}, \mathfrak{C}\gamma\delta\varepsilon + \delta\varepsilon + \mathfrak{C}\varepsilon + \mathfrak{C}\gamma + 1$, etc.

cuius progreſſionis quisque terminus eſt aggregatum ex termino praecedente in indicem ſupra ſe ſcriptum multiplicato et termino hunc praecedente.

§. 9. Si igitur v per b diuidi poterit, erit $m = 0$; ſi v per c diuidi poteſt erit $m = \frac{v}{c}$ propter $A = 0$; ſi v per d diuidi poterit, fiat $B = 0$; eritque $m = \frac{v}{d}\mathfrak{C}$. Vnde ſequens oritur lex:

Si eſt numerus integer	erit
$\frac{v}{b}$	$m = o$
$\frac{v}{c}$	$m = -\frac{v}{c}$
$\frac{v}{d}$	$m = +\frac{v}{d}\mathfrak{B}$
$\frac{v}{e}$	$m = -\frac{v}{e}(\mathfrak{B}\gamma + 1)$
$\frac{v}{f}$	$m = +\frac{v}{f}(\mathfrak{B}\gamma\delta + \delta + \mathfrak{B})$
$\frac{v}{g}$	$m = -\frac{v}{g}(\mathfrak{B}\gamma\delta\varepsilon + \delta\varepsilon + \mathfrak{B}\varepsilon + \mathfrak{B}\gamma + 1)$
$\frac{v}{b}$	$m = +\frac{v}{b}(\mathfrak{B}\gamma\delta\varepsilon\zeta + \delta\varepsilon\zeta + \mathfrak{B}\varepsilon\zeta + \mathfrak{B}\gamma\zeta + \mathfrak{B}\gamma\delta + \zeta + \delta + \mathfrak{B})$ etc.

Si nunc hi ipſius m valores in aequatione $z = ma + p$ ſubſtituantur, reperietur vt ſequitur:

Si eſt integer	erit
$\frac{v}{b}$	$z = q + \frac{bv}{b}1 = q + v$
$\frac{v}{c}$	$z = q - \frac{bv}{c}\alpha$
$\frac{v}{d}$	$z = q + \frac{bv}{d}(\alpha\mathfrak{B} + 1)$
$\frac{v}{e}$	$z = q - \frac{bv}{e}(\alpha\beta\gamma + \alpha + \gamma)$
$\frac{v}{f}$	$z = q + \frac{bv}{f}(\alpha\mathfrak{B}\gamma\delta + \alpha\mathfrak{B} + \alpha\delta + \gamma\delta + 1)$
$\frac{v}{g}$	$z = q - \frac{bv}{g}(\alpha\mathfrak{B}\gamma\delta\varepsilon + \alpha\mathfrak{B}\gamma + \alpha\mathfrak{B}\varepsilon + \alpha\delta\varepsilon + \gamma\delta\varepsilon + \alpha + \gamma + \varepsilon)$ etc

§. 10. Ad inueniendum ergo numerum z, qui per a diuiſus relinquat p, et per b diuiſus relinquat q, poſito $p - q = v$ ſequentem habebimus regulam; Inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inter a et b inueniendum, eaque eovsque producatur, donec ad reſiduum perueniatur, quod ſit diuiſor ipſius v, teneaturque quotus

quotus ex diuisione ipsius v per illud residuum resultans, qui sit Q, vbi operatio abrumpatur Deinde in serie scribantur quoti α, β, γ, etc. in hac diuisione orti, ex iisque construatur, noua series $1, \alpha, \alpha\beta+1, \alpha\beta\gamma+\alpha+\gamma$, etc. quae ex illa quotorum serie formatur, atque eovsque continuari debet, quovsque per illam seriem fieri potest. Sub hac noua serie scribantur signa alternantia $+--+-$ etc. vltimusque terminus cum suo signo multiplicetur per Q, atque etiam per minorem diuisorem propositum b, ad factum addatur residuum q diuisori b respondens. Quo facto erit aggregatum numerus quaesitus.

§. 11. Inuento hoc modo vno numero satisfaciente z, ex eo statim innumerabiles aliis numeri satisfacientes reperiuntur. Nam si z per a diuisum p relinquit et per b diuisum q; eandem proprietatem habebunt quoque numeri $ab+z$, $2ab+z$, et $mab+z$. Multiplum quidem facti ab continuo adiici vel auferri potest, si a et b fuerint inter se numeri primi; at si a et b fuerint numeri compositi, tum etiam sufficit eorum minimum communem diuiduum sumsisse; cuius multiplum quodque adiectum vel ablatum a z dabit numeros satisfacientes; vt si minimus communis diuiduus fuerit M comprehendet mM$+z$ omnes omnino numeros quaestioni satisfacientes. Quare etiamsi hoc modo saepe numeri negatiui pro z inueniantur, tamen adiiciendo ad eos M vel eius multiplum obtinebuntur numeri affirmatiui. Hac ergo operatione semper minimus numerus satisfaciens

inuenietur, ſiquidem minimus communis diuiduus M toties ſubtrahatur, quoties fieri poteſt.

§. 12. Quia exemplis haec operatio maxime illuſtrabitur, quaeramus numerum, qui per 103 diuiſus relinquat 87, et per 57 diuiſus relinquat 25. Erit ergo $a = 103$; $b = 57$; $p = 87$ et $q = 25$, atque $\gamma = 62$; quare operationem ita inſtituo

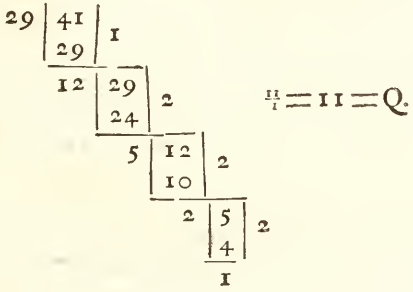
$$\begin{array}{r|l|l} 57 & 103 & 1 \\ & 57 & \\ \hline & 46 & 57 \\ & & 46 \\ \hline & & 11 \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r|l|l} & 57 & 1 \\ & 46 & \\ \hline & 46 & 4 \\ & 44 & \\ \hline & 2 & \end{array} \qquad \frac{62}{2} = 31 = Q.$$

1,	1,	4	
1,	1,	2,	9
+	−	+	−

Nunc eſt $-9 \cdot 31 = -279$; atque numerus quaeſitus $= 25 - 57 \cdot 279$; qui cum fiat negatiuus addo ad eum $3 \cdot 57 \cdot 103$ ſeu $57 \cdot 309$, vnde inuenitur $25 + 57 \cdot 30 = 1735$, qui eſt minimus numerus quaeſitus; omnes vero ſatisfacientes continentur in hac forma $m \cdot 103 \cdot 57 + 1735$.

§. 13. Quaeramus porro numerum, qui per 41 diuiſus relinquat 10, et per 29 diuiſus relinquat 28. In

In hoc exemplo compendium adhibebo, quod in aliis similibus computationibus magnam habebit vtilitatem, nam cum in diuisione per 29 residuum sit 28, restare quoque poterit in eadem diuisione -1 si quotus vnitate maior accipiatur. Sumo ergo -1 pro residuo diuisoris 29; eritque $a=41$, $b=29$, $p=10$ et $q=-1$; vnde erit $v=11$. Operationem ergo vt ante instituo ita



$\frac{11}{1}=11=Q.$

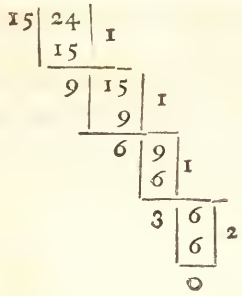
1,	2,	2,	2.	
1,	1,	3,	7,	17
+	−	+	−	+

Erit ergo $+17.\ 11=187$; atque numerus quaesitus $=-1+29.\ 187$. Subtrahatur 29. 4. 41 erit is $=-1+29.\ 23=666$. Satisfacient ergo quaestioni omnes numeri in hac forma *m*. 41. $29+666$ contenti.

§. 14. Com-

§. 14. Compendium hinc se prodit ad supra datam regulam adiiciendum, quod in hoc constat, vt, postquam numerus Q per ultimum seriei formatae terminum est multiplicatus, factum per maiorem diuisorem a diuidatur, atque residuum loco ipsius facti adhibeatur. Scilicet hoc residuum per minorem diuisorem b multiplicatum atque residuo q auctum dabit numerum quaesitum. Atque iste numerus hoc pacto inuentus erit minimus, qui satisfacit. Praeterea hac diuisione effici potest vt residuum prodeat affirmatiuum, etiamsi diuidendus fuerit negatiuus. Ita in primo exemplo §. 12 habebatur -279, qui numerus per 103 diuisus, sumto quoto $= 3$, relinquit $+30$. Ex quo numerus quaesitus minimus est $= 25 + 57 \cdot 30 = 1735$.

§. 15. Fieri deinde etiam potest, vt huiusmodi exempla proponantur, quae solutionem omnino non admittant, vti si quaeratur numerus qui per 24 diuisus relinquat 13, per 15 vero diuisus relinquat 9; talis enim numerus per alteram conditionem deberet esse per 3 diuisibilis, per alteram secus. Idem vero etiam ipsa regula ostendit, nunquam enim ad tale residuum, excepto 0, deuenietur, quod diuidat v seu 4, vti ex ipsa operatione videre est



Huiusmodi vero exempla exhiberi non poſſunt, niſi diuiſores a et b ſint numeri compoſiti inter ſe; nam ſi fuerint inter ſe primi, ſemper numeri quaeſiti exhiberi poſſunt. Sin autem diuiſores a et b fuerint numeri compoſiti, atque v non diuidi potuerit per maximum ipſorum a et b diuiſorem, tum ſemper problema ad abſurdum deducit. Hocque eſt criterium, ex quo, num problema ſolutionem admittat, diiudicari poteſt, antequam operatio inſtituatur.

§. 16. Expoſito hac methodo vniuerſali, qua omnis generis huius problemata facile reſolui poſſunt, ex ea alia regula poteſt formari, quae quidem ad vſum non eſt tam facilis, at ſimplicitatis plus in ſe habet. Oritur ea autem, ſi in valoribus ſupra inuentis ipſius (z) (§. 9), loco α, β, γ, etc. eorum valores ex aequationibus $a = \alpha b + c$, $b = \beta c + d$, etc. ſubſtituantur. Nam ſi inſtituatur operatio ad maximum communem diuiſorem inter a et b inueniendum, ex eaque innoteſcant

continua reſidua c, d, e, etc. dico fore numerum $z = q + abv(\frac{1}{ab} - \frac{1}{bc} + \frac{1}{cd} - \frac{1}{de} + \frac{1}{ef} -$ etc.), eousque hac ſerie continuanda, donec v per factorem aliquem denominatoris diuidi queat. Vti ſi quaeratur numerus, qui per 16 diuiſus relinquat 1 et per 9 diuiſus relinquat 7, erit $a = 16$, $b = 9$, $p = 1$, $q = 7$, et $v = -6$. Quare

$$\begin{array}{r|l|l} 9 & 16 & 1 \\ & 9 & \\ \hline & 7 & 9 \\ & & 7 \\ \hline & & 2 \\ \hline & & 1 \end{array} \quad \begin{array}{|l|l} 7 & \\ 6 & 3 \\ \hline & \end{array}$$

Hinc ergo erit $z = -6.9.16(\frac{1}{16.9} - \frac{1}{9.7} + \frac{1}{7.2}) = 7 - 6 + \frac{6.16}{7} - \frac{3.9.16}{7} = 1 - 3.16 = -47$. Satisfaciunt ergo omnes numeri $m.\ 144 - 47$ ſeu $m.\ 144 + 97$; eorumque minimus eſt 97. Superior formula generalis ipſius z etiam in hunc modum poteſt exprimi $z = p - abv(\frac{1}{bc} - \frac{1}{cd} + \frac{1}{de} - \frac{1}{ef} +$ etc.) quae ſeries fractionum eousque continuari debet, donec valor ipſius z fiat numerus integer.

§. 17. Conſiderabo nunc quosdam caſus particulares, in quibus a ad b datam habeat relationem; et primo quidem ſit $b = a - 1$ ſeu $a = b + 1$, reſidua vero ex diuiſione numeri quaeſiti per a et b orta ſint vt ante p et q. Erit ergo $c = 1$; ideoque per regulam

lam poſtremam $z = p - av = p - ap + aq$. Quae expreſſio ſi $aq + p > ap$ dat minimum numerum quaeſito ſatisfacientem: at ſi $aq + p < ap$ tum minimus numerus ſatisfaciens erit $a^2 - a + p - ap + aq$. Omnes vero numeri ſatisfacientes in hac formula generali $ma^2 - ma + p - ap + aq$ comprehenduntur, ſeu etiam in iſta $mb^2 + mb - bp + bq + q$. Quicquid nunc ſit m ſi haec quantitas diuidatur per $b^2 + b$ reſiduum erit minimus numerus quaeſito ſatisfaciens.

§. 18. Quemadmodum hac ratione ope reſiduorum datorum, quae poſt diuiſionem numeri incogniti per diuiſores b et $b + 1$ remanent, ipſe numerus incognitus ſit inueniendus, docuit *Sifelius* in Commentario ad *Rudolfi* artem Coſſicam. Regula eius ita ſe habet: ſi fuerit reſiduum numeri incogniti per $b + 1$ diuiſi p, et reſiduum eiusdem per b diuiſi q, iubet q multiplicare per $b + 1$, et p per b^2, horumque factorum aggregatum per $b^2 + b$ diuidere, quod reſtat poſt diuiſionem, id pronunciat eſſe numerum quaeſitum. Fluit autem haec regula ex noſtra generali formula, ſi ponatur $m = p$, tum enim habetur $b^2 p + (b + 1)q$, quod per $b^2 + b$ diuiſum relinquit minimum numerum quaeſitum.

§. 19. Interim tamen minori opera minimus numerus ſatisfaciens reperietur ſequenti modo: Reſiduum q, quod ex diuiſione quaeſiti numeri per b oritur, multiplicetur per $b + 1$, factumque addatur ad numerum pronicum ipſius b puta ad $b^2 + b$, hinc ſubtrahatur factum

ex reſiduo p, quod ex diuiſione numeri quaeſiti per $b+1$ remanet, ducto in b; ſi id quod reſtat fuerit $< b^2+b$, erit id ipſe numerus quaeſitus, ſin vero fuerit $> b^2+b$ ſubtrahatur b^2+b, eritque reſiduum numerus quaeſitus. Vt ſi quaeratur numerus, qui per 100 diuiſus relinquat 75 et per 101 diuiſus 37; tum addatur 10100 ad factum ex 75 in 101 ſeu 7575, vt habeatur 17675, hinc ſubtrahatur factum ex 37 in 100 ſeu 3700 remanebit 13975, a quo ſi 10100 auferantur prodibit 3875, qui eſt minimus numerus quaeſitus.

§. 20. Si quaeratur numerus qui per b diuiſus relinquat q et per $nb+1$ diuiſus p; erit iterum $c=1$ atque numerus quaeſitus $z=p-av=p-ap+aq=(nb+1)q-nbp$ ob $a=nb+1$. Atque omnes numeri ſatisfacientes continebuntur in hac expreſſione $mnb^2+mb+(nb+1)q-nbp$, ex qua ſumto pro m numero quocunque, inuenietur minimus numerus ſatisfaciens, ſi ea expreſſio diuidatur per nb^2+b; reſiduum enim erit minimus numerus ſatisfaciens.

§. 21. Caſus porro notari meretur, quo reſidua p et q, quae oriuntur ex diuiſione quaeſiti numeri per datos diuiſores a et b, ſunt inter ſe aequalia ſeu $p=q$. Hoc enim caſu fit $v=0$, ideoque inuenitur numerus quaeſitus $z=p$. Si igitur ſit M minimus communis diuiduus numerorum a et b, omnes numeri ſatisfacientes continebuntur in hac formula $mM+p$. Eadem pla-

plane formula quoque satisfacit, si quotcunque fuerint diuisores a, b, c, d, etc. per quos singulos numerus quaesitus diuisus relinquat p, si quidem M denotet omnium diuisorum minimum communem diuiduum. Omnes ergo numeri huiusmodi quaestionibus satisfacientes ita sunt comparati, vt per M diuisi relinquant p.

§. 22. Hinc satis tritum problema, quo quaeritur numerus, qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisus relinquat 1 per 7 vero nihil relinquat, solui potest. Omnes enim numeri qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuisi relinquunt 1 hanc habent proprietatem vt per 60, qui numerus est minimus communis diuiduus numerorum 2, 3, 4, 5, et 6, diuisi relinquant 1. Problema ergo huc redit vt inueniatur numerus qui per 60 diuisus relinquat 1, per 7 vero sit diuisibilis; erit ergo $a = 60$, $b = 7$, $p = 1$, $q = 0$, et $v = 1$. Facta ergo operatione.

7	60	8	
	56		
4	7	1	$\frac{1}{1} = 1 = Q.$
	4		8, 1, 1.
3	4	1	1, 8, 9, 17
	3		+ − + −
	1		

Erg. $z = 0 - 119 + 420m$.
et si $m = 1$ erit $z = 301$.

§. 23. Maiorem difficultatem habere videtur hoc problema, quo quaeritur numerus qui per numeros 2,

3, 4, 5, 6 diuiſus reſpectiue relinquat numeros 1, 2, 3, 4, 5, at per 7 diuidi queat, propter reſidua propoſita inaequalia. Sed haec quaeſtio congruit cum hac: inuenire numerum qui per 2, 3, 4, 5, 6 diuiſus relinquat -1 et per 7 nihil. Illi iam conditioni ſatisfacit forma $60m-1$; quare numerus quaeritur qui per 60 diuiſus -1, at per 7 nihil relinquat, fit itaque $a=60, b=7, p=-1, q=0$, et $v=-1$ atque operatione vt ante inſtituta eſt $Q=-1$ quod in -17 ductum dat $+17$, hocque per b multiplicatum dat 119 numerum quaeſitum.

§. 24. Ex his duobus exemplis apparet, quomodo huiusmodi quaeſtiones, in quibus quotcunque diuiſores proponuntur, quibus autem duo tantum reſidua reſpondent, per ſupra datas regulas ſolui queant; ſtatim enim quaeſtio ad quaeſtionem duorum diuiſorum reducitur: vti ſi omnia reſidua ſunt aequalia, quaeſtio perinde ſoluitur, ac ſi vnicus diuiſor fuiſſet propoſitus. At ſi reſidua ſunt inaequalia, tum nihilominus repetendis his operationibus, quibus pro duobus diuiſoribus vſi ſumus, ſolutio poterit obtineri. Primo enim duobus diuiſoribus ſatisfieri debet, tum tertius aſſumitur, deinde quartus, donec omnibus erit ſatisfactum. Hoc vero commodiſſime exemplis explicabitur.

§. 25. Quaeramus igitur numerum, qui per 7 diuiſus relinquat 6, per 9 relinquat 7, per 11 relinquat 8 et per 17 relinquat 1. Ex his iam quatuor condi-

conditionibus ſumamus duas quasque, vt duas priores, et inueſtigemus omnes numeros iis ſatisfacientes. Erit ergo $a=9, b=7, p=7, q=6$ et $v=1$, quare operatio inſtituetur vti ſequitur:

$$\begin{array}{r|l|l} 7 & 9 & 1 \\ & 7 & \\ \hline 2 & 7 & 3 \\ & 6 & \\ \hline & 1 & \end{array} \qquad Q=1.$$

$$\begin{array}{l} 1, 3, \\ 1, 1, 4 \\ +\ -\ + \end{array} \qquad \text{fietque } z=6+1.4.7=34.$$

Omnes ergo numeri his duabus conditionibus ſatisfacientes continentur in hac forma $63m+34$, ſeu ita erunt comparati, vt per 63 diuiſi relinquant 34.

§. 26. Problema ergo huc eſt reductum, vt inueniatur numerus, qui diuiſus per 63 relinquat 34, per 11 relinquat 8, et per 17 relinquat 1. Harum trium conditionum ſumantur duae priores eritque $a=63, b=11$, $p=34$, $q=8$, et $v=26$, vnde fluit ſequens operatio:

$$\begin{array}{r|l|l} 11 & 63 & 5 \\ & 55 & \\ \hline 8 & 11 & 1 \\ & 8 & \\ \hline 3 & 8 & 2 \\ & 6 & \\ \hline & 2 & \end{array} \qquad Q = \tfrac{16}{2} = 13.$$

5, 1, 2
1, 5, 6, 17 ergo $z = m.63.11 + 8 - 13.17.11.$
$+ - + -$

Quo minimus numerus satisfaciens reperiatur, ponatur $m = 4$; erit $z = 8 + 31.11 = 349$. Omnes ergo numeri satisfacientes in hac continentur forma $693m + 349$, seu hanc habebunt proprietatem, vt per 693 diuisi relinquant 349.

§. 27. Problema ergo tandem huc est reductum, vt definiatur numerus, qui per 693 diuisus relinquat 349 et per 17 diuisus relinquat 1. Facio ergo $a = 693$, $b = 17$, $p = 349$, $q = 1$, et $v = 348$, sequentemque iuxta data praecepta instituo operationem:

$$\begin{array}{r|l|l} 17 & 693 & 41 \\ & 697 & \\ \hline & -4 & \end{array} \qquad Q = \tfrac{348}{-4} = -87.$$

41
1, 41 $z = 693.17.m + 1 + 41.87.17.$
$+ -$

Quo

Quo minimus numerus satisfaciens prodeat pono $m = -5$, eritque $z = 1 + 102.17 = 1735$, qui est minimus numerus quatuor praescriptis conditionibus satisfaciens Omnes autem qui satisfaciunt hac continentur formula $11781m + 1735$. Ex hoc exemplo ergo abunde intelligitur, quomodo omnes huiusmodi quaestiones sint resoluendae.

§. 28. Pertinet huc solutio problematis chronologici satis cogniti, quam, prout ex his regulis inueni, apponam, in quo annus a Christo nato quaeritur, ex datis cyclis solis et lunae vna cum indictione Romana illius anni. Cum enim cyclus solis sit residuum, quod oritur diuisione numeri anni nouenario aucti per 28; cyclus vero lunae sit residuum, quod oritur diuisione numeri anni vnitate aucti per 19; Indictio vero Romana sit residuum, quod oritur, si numerus anni ternario auctus per 15 diuidatur, sequens prodiit solutio. Sit p cyclus solis, q cyclus lunae et r indictio Romana; multiplicetur p per 4845; q per 4200; et r per 6916, haec tria producta cum numero 3267 in vnam summam coniiciantur, eaque diuidatur per 7980; quod remanebit residuum erit numerus anni quaesiti. Si annus periodi Iulianae requiratur, tum operatio eodem modo instituatur, nisi quod numerus 3267 negligi debet; quae est regula iam passim tradita.

§. 29. Multam quidem operam requirit solutio pro pluribus diuisoribus, si quidem problema continuo

ad casum, quo diuisorum numerus vnitate minuitur, vt in praecedente exemplo fecimus, reducitur; At ex ea ipsa operatione facilior multoque breuior via sese prodit, qua statim proposita quaestio, quotcunque etiam fuerint diuisores, ad casum duorum diuisorum reduci potest; quae regula ita se habet: Inueniendus sit numerus, qui per diuisores a, b, c, d, e, quos numeros inter se primos esse pono, diuisus relinquat respectiue haec residua p, q, r, s, t. Huic quaestioni satisfacit iste numerus $Ap + Bq + Cr + Ds + Et + mabcde$, in qua expressione A est numerus, qui per factum $bcde$ diuisus nihil relinquat, per a vero diuisus relinquat vnitatem; B est numerus, qui per $acde$ diuisus relinquat nihil, per b vero vnitatem; C est numerus qui per $abde$ diuisus nihil relinquat, per c vero vnitatem; D est numerus qui per $abce$ nihil relinquat, per d vero vnitatem; atque E est numerus per $abcd$ diuisus nihil relinquat, per e vero vnitatem, qui ergo numeri per regulam pro duobus diuisoribus datam inueniri possunt.

DE

DE MOTV PLANETARVM ET ORBITARVM DETERMINATIONE

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

CVm hoc tempore satis constet, planetas in ellipsibus moueri, in quarum altero foco sol sit positus, motumque ita esse comparatum, vt tempora areis circa solem descriptis sint proportionalia; quaestio de motu planetarum duplex oritur, quarum altera qualitatem ellipsis, positionem absidum scilicet et excentricitatem requirit, altera vero ipsius planetae motum in sua orbita. Vtramque hanc quaestionem hic euoluere, et quantum calculi difficultas permittet, resoluere conabor. Tabula IV.

§. 2. Primum quidem orbitam planetae pro cognita habebo, atque motum planetae in ea definire studebo. Sit igitur A D B semissis orbitae planetae cuiusdam P, cuius absis summa seu aphelion sit in A, periphelion vero in B, atque sol sit in foco ellipsis S positus. Sit porro C centrum orbitae, et ponatur semiaxis A C vel B C $= a$, distantia foci S a centro C seu excentricitas C S $= b$, erit semiaxis coniugatus C D $= \sqrt{(a^2 - b^2)}$. Ponamus nunc planetam ex aphelio A peruenisse in P, Fig. 1.

hincque momento temporis progredi in p, ex quibus punctis tam ad S rectae, quam ad axem AB perpendicula ducantur; ponaturque $CQ = r$, erit $PQ = \frac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{a}$, et $PS = a + \frac{br}{a}$.

§. 3. His positis exprimit angulus ASP planetae anomaliam veram seu coaequatam, quam ponam $= z$. Anomalia vero media proportionalis est tempori, quo planeta spatium AP absoluit, seu areae ASP. Erit ergo area ADB ad aream ASP vt angulus duobus rectis aequalis ad anomaliam mediam. Consideremus nunc circulum radii 1, cuius arcus sit anomalia vera $= z$, in eodem ergo si anomaliam mediam inuenire velimus, quae aequalis sit arcui x; erit area ADB ad angulum duobus rectis aequalem seu ad duplam aream semicirculi illius vt AC. CD ad 2, i. e. vt $a\sqrt{(a^2-b^2)}$ ad 2. Fiet igitur $a\sqrt{(a^2-b^2)} : 2 = \text{Area. ASP} : x$, vnde est $x = \frac{2\,\text{Area ASP}}{a\sqrt{(a^2-b^2)}}$.

§. 4. Cum sit anomalia vera z aequalis angulo ASP, erit eius incrementum dz aequale PSp. Angulus vero PSp aequatur areolae PSp bis sumtae per quadratum PS diuisae; erit scilicet $dz = \frac{2\,\text{Areol. }PSp}{(a+\frac{br}{a})^2} = \frac{2a^2\,PSp}{(a^2+br)^2}$. At ex superiore aequatione erit $dx = \frac{2\,PSp}{a\sqrt{(a^2-b^2)}}$. Restat ergo, vt elementum areae PSp idoneo modo exprimatur, id quod ex consideratione totius areae fiet. Est enim area $ASP = \frac{PQ.QS}{2} + \int PQ.Qq = \frac{(b+r)\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{2a} - \int$

$-\int \frac{dr\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-r^2)}}{a}$, cuius differentiale eſt $=\frac{dr(a^2+br)\sqrt{(a^2-b^2)}}{2a\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quod ergo eſt $=PSp$. Hinc igitur fit elementum anomaliae mediae $dx=\frac{dr(a^2+br)}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, et elementum anomaliae verae $dz=\frac{adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$.

§. 5. His duabus aequationibus continetur relatio, quae inter anomaliam mediam et veram intercedit; ad eam ergo definiendam oportet, vt vtraque aequatio integretur, quo tandem aequatio inter z et x elici queat. Quod ad priorem attinet, ea ſtatim abit in hanc $dx=\frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ $\frac{-brdr}{a^2\sqrt{(a^2-r^2)}}$, cuius integralis eſt $x=A.\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}+\frac{b}{a^2}\sqrt{(a^2-r^2)}$, vbi A ſignificat arcum circuli, cuius ſinus eſt quantitas poſtfixa exiſtente ſinu toto $=1$. Poſito ergo hoc ſinu $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}=s$, erit $x=A.s+\frac{bs}{a}$.

§. 6. Altera aequatio differentialis eſt $dz=\frac{adr\sqrt{(a^2-b^2)}}{(a^2+br)\sqrt{(a^2-r^2)}}$ quae cum abſolute, tum plurimis modis per ſeries poteſt integrari. Prae reliquis vero is modus eligendus eſſe videtur, qui huiusmodi det ſeriem, in qua dimenſiones ipſius b in numeratoribus creſcant, quo pro exiguis excentricitatibus ſufficiat duos vel tres terminos initiales aſſumſiſſe.

§. 7. In ſeriem ergo primum conuerto $\sqrt{(a^2-b^2)}$, quae erit iſta $a-\frac{1.b^2}{2a}-\frac{1.1.b^4}{2.4.a^3}-\frac{1.1.3b^6}{2.4.6.a^5}$ etc. $=a-\frac{b^2}{2a}-\frac{b^4}{8a^3}-\frac{b^6}{16a^5}$ etc. Deinde eſt etiam $\frac{a}{a^2+br}=\frac{1}{a}-\frac{br}{a^3}+\frac{b^2r^2}{a^5}-\frac{b^3r^3}{a^7}+$ etc. Hae ergo duae ſeries in ſe inuicem multiplicata dabunt $\frac{a\sqrt{(a^2-b^2)}}{a^2+br}=1-\frac{br}{a^2}-\frac{b^2(a^2-2r^2)}{2a^4}+\frac{b^3r(a^2-3r^2)}{2a^6}-\frac{b^4(a^4+4a^2r^2-8r^4)}{8a^8}+$

$+\frac{b^5 r(a^4+4a^2r^2-8r^4)}{8a^{10}}$ — etc. Si nunc huius ſeriei ſinguli termini ducantur in $\frac{-dr}{\sqrt{(a^2-r^2)}}$ habebitur elementum anomaliae verae dz. Erunt vero omnes termini praeter primum abſolute integrabiles, inuenietur enim $z = A. \frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{\alpha} - \frac{b\sqrt{(a^2-r^2)}}{a^2} + \frac{b^2 r\sqrt{(a^2-r^2)}}{2a^4} - \frac{b^3(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{6a^6} + \frac{b^4 r(a^2+2r^2)\sqrt{(a^2-r^2)}}{8a^8}$ — etc.

§. 8. Dicatur nunc arcus ſeu angulus V, cuius ſinus eſt $\frac{\sqrt{(a^2-r^2)}}{a}$ et ſignum $\int$ denotet poſthac ſinum anguli poſtſcripti; erit $x = V + \frac{b}{a}\int V$, atque per eundem angulum V eiusque ſinum vna cum multiplorum ipſius ſinibus z ſequenti modo determinabitur, vt ſit $z = V - \frac{b}{a}\int V + \frac{b^2}{4a^2}\int 2V - \frac{b^3}{12a^3}(\int 3V + 3\int V) + \frac{b^4}{32a^4}(\int 4V + 4\int 2V) - \frac{b^5}{80a^5}(\int 5V + 5\int 3V + 10\int V) + \frac{b^6}{192a^6}(\int 6V + 6\int 4V + 15\int 2V) - \frac{b^7}{448a^7}(\int 7V + 7\int 5V + 21\int 3V + 35\int V)$ + etc. cuius ſeriei lex facile patet, conſtituunt enim denominatores numerales hanc ſeriem, 1. 1, 2. 2, 3. 4, 4. 8, 5. 16, 6. 32, etc.

§. 9. Commodiſſime ergo ex data anomalia media x determinabitur anomalia vera z, ſi primum ex aequatione $x = V + \frac{b}{a}\int V$ angulus V per angulum x definiatur, atque is tum in altera aequatione anomaliam veram z exhibente ſubſtituatur. Difficile autem videtur ex illa aequatione V per x definire, cum ſit aequatio transcendens, atque ideo V per x algebraice omnino exprimi nequeat. In id ergo eſt incumbendum, vt V quam fieri poteſt proxime et minimo labore per x defini-

finiatur, id quod mihi sequenti modo commodissime praestari videtur, erit scilicet $V = x - \frac{b}{a}\int(x - \frac{b}{a}\int(x - \frac{b}{a}$ $\int(x -$ etc. hinc enim admodum erit facile angulum V inuenire. Nam sumatur log. $\int x$ ab hoc subtrahatur log. $\frac{a}{b}$, denuoque subtrahatur iste log. 6, 4637261; residuum quaeratur inter logarithmos numerorum naturalium, numerusque respondens dabit angulum in minutis primis. Iste deinde angulus subtrahatur ab anomalia media x, residuique anguli sinus capiatur logarithmus, a quo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 subtrahatur, numerusque logarithmo residuo respondens dabit numerum minutorum primorum ab x subtrahendum, angulus residuus, si opus esse censeatur, denuo eodem modo tractetur, donec tandem neque amplius augeatur neque minuatur; atque tum iste angulus erit verus valor ipsius V.

§. 10. Inuento hac ratione angulo V, a logarithmo eius sinus denuo tam log. $\frac{a}{b}$ quam 6, 4637261 subtrahatur, et numerus residuo respondens dabit angulum in minutis primis expressum, qui ab V subtrahi debet, residuumque erit anomalia vera iam satis exacta; magis vero correcta euadet si sinus dupli anguli V sumatur logarithmus ab eoque duplus log. $\frac{a}{b}$, et log. 4. atque praeterea 6, 4637261 subtrahantur residui enim numerus respondens dabit minuta prima insuper vel addenda vel subtrahenda prout V vel minor vel maior fuerit quam 90°. Praeterea etiam sequentes termini seriei, cui z aequalis est inuenta, eodem modo computari

tari poſſunt, quamdiu anguli inueniuntur, quos negligere non volemus. Semper autem dum res logarithmis peragitur, praeter conſuetas operationes logarithmorum, iſte logarithmus 6,4637261 ſubtrahi debet, numerusque reſpondens dabit minuta prima; ſin loco minutorum primorum ſecunda deſiderentur, tum loco illius logar. iſte debet vſurpari 4,6855749.

§. 11. Inuento angulo V facile innoteſcet planetae a ſole diſtantia $PS = a + \frac{br}{a}$; fiat vt ſinus totus ad coſinum anguli V ita b ad quartam proportionalem, quae ad diſtantiam mediam a addita vel ſubtracta, prout coſinus ipſius V fuerit vel affirmatiuus vel negatiuus, dabit veram planetae a ſole diſtantiam. Ex angulo quoque z inuento ſeu ipſa anomalia vera, diſtantia PS poterit inueniri, erit namque $PS = \frac{(a+b)(a-b)}{a-b.\text{cof.}z}$.

§. 12. Inuento angulo V porro ſimplicius ipſa anomalia vera z poterit inueniri; erit enim cof. $z = \frac{a.\text{cof.}V+b}{a+b\text{ cof.}V}$, vel ſin. $z = \frac{fV.v(a^2-b^2)}{a+b.\text{cof.}V}$, quae expreſſio etſi ſimplicior eſt et breuior, quam ſupra inuenta ſeries, tamen neſcio, an illa non ſit huic, ſi commoditas calculi ſpectetur, praeferenda; in ſequenti vero iſta formula maiorem fortaſſe praeſtabit vtilitatem.

§. 13. Sit nobis exemplum orbita Martis, in qua eſt $a:b = 152369:14100$. ideoque log. $\frac{a}{b} = 1,0336775$. Dataque ſit anomalia media $2S, 20^\circ$, ſeu 80° quaeraturque anomalia vera. Erit ergo operatio inſtituenda vt ſequitur.

$l\frac{a}{b} =$

$l\frac{a}{b} = 1,0336775$
$4,6855749$
$5,7192524$

$l\int 80 = 9,9933515$
subtr. $5,7192524$
$4,2740991$
num. $18797''$
hoc est $5°, 13', 17''$
ab $80°$
restat $74°, 40', 43''$
log. sinus huius anguli $= 9,9844906$
subtr. $5,7192524$
$4,2652382$
num. $18418''$
hoc est $5°, 6', 58''$
ab $80°$
restat $74°, 53', 2''$
log. sinus huius anguli $= 9,9847070$
subtr. $5,7192524$
$4,2654546$
num. $18427''$
hoc est $5°, 7', 7''$
ab $80°$
restat $74°, 52', 53''$
log. sinus huius anguli $= 9,9847035$
subtr. $5,7192524$
$4,2654511$
num. 18427
hoc est $5°, 7', 7''$

Erit ergo V $= 74°, 52', 53''$
subtrah. $\frac{b}{a}\int V = 5°, 7', 7''$

☌ prope verus valor =	69°, 45′, 46″
2V =	149°, 45′, 46″
Deinceps poſ. =	30°, 14′, 14″
log. ſinus huius anguli	9, 7020703
ſubtrah. $2l\frac{a}{b}$	2, 0673550
	7, 6347153
ſubtrah.	4, 6855749
	2, 9491404
ſubtrah. log. 4	0, 6020600
	2, 3470804
num.	222″
hoc eſt	3′, 42″ addat.

Valor ipſius ☌ magis correctus 69°, 49′, 28″

$3V = -44°, 38', 39''$, ſinus $= -7025671$

$+3\int V$ =	28961904
$\int 3V + 3\int V$ =	21936233
eius log. =	10, 3412220
ſubtrah. $3l\frac{a}{b}$ =	3, 1010325
	7, 2401895
ſubtrah. $l12$ =	1, 0791812
	6, 1610083
ſubtrah.	4, 6855749
	1, 4754334
num.	37″ ſubtr.

Valor ipſius ☌ correctus ſeu anomalia vera = 69°, 48′, 51″.

§. 14.

§. 14. Cum vero altero modo, quo $\approx$ ex V inueniri poteſt, ſit cof. $\approx = \text{cof. V} + \frac{b \int V . \int V}{a + b . \text{cof. V}} = \text{cof. V} + \frac{\int V . \int V}{\frac{a}{b} + \text{cof. V}}$, videamus an eandem anomaliam veram eodem modo inueniamus. Operatio erit vt ſequitur:

Cof. V	=	2608181
ſin. tot. $\frac{a}{b}$	=	10806312 1
$\frac{a}{b}$ + cof. V	=	11067302
huius log.	=	11, 0440348
$2 l \int V$	=	19, 9694070
diff.	=	8, 9253722
reſpondet ſinus		842116
ad cof. V		2608181
cof. $\approx$	=	3450297
Ergo Anomalia vera	=	69°, 48′, 59″

ad quam ante inuenta proxime accedit, notandum autem eſt praecedentem eſſe nimis paruam, cum adhuc terminum $\frac{b^4}{32a^4}(\int 4 V + 4 \int V)$ adiicere opportuiſſet; hic vero terminus ne integrum quidem minutum ſecundum efficit. Ceterum in prioris calculi ultima operatione partes medias proportionales non ſumſi; atque in iſto calculo tabulae log. non ſufficiebant.

§. 14. Diſtantia Martis a ſole reſpondens huic anomaliae eſt $= a + b$ cof. V; eſt vero vt ante inuenimus $\frac{a}{b} + \text{cof. V} = 11067302$. Fiat ergo vt ſinus

totus ad hunc numerum, ita b ad diſtantiam Martis a ſole. Ergo erit per logarithmos

$l(\frac{a}{b} + \text{cof. V}) =$	11, 0440348
$+ lb.$	4, 1492191
$- l$ ſin. tot.	$-$ 10, 0000000
log. diſt. a ⊙	5, 1932539

§. 16. Denique notandum eſt, ſi inuenta fuerit anomalia vera datae anomaliae mediae reſpondens, facili negotio incrementum minimum anomaliae verae inueniri poſſe, ſi anomalia media minima particula augeatur. Augeatur ſcilicet anomalia media angulo dx, erit incrementum anomaliae verae $dz = \frac{dx}{(1 + \frac{b}{a}\text{cof. V})^2}$ Noſtro ergo caſu erit $l(1 + \frac{b}{a}\text{cof. V}) = 0,0103573$ et $(1 + \frac{b}{a}\text{cof. V})^2 = 1,04885$ Quare erit $dz = \frac{dx}{1,04885} = dx - \frac{2dx}{43}$ ſi ergo anomalia media fuerit 81°, erit anomalia vera 70°, 46′, 4″

§. 17. Sin autem quis velit hac methodo tabulam anomalium verarum computare, is ſcopum ſuum commodius aſſequetur, ſi non anomalias medias pro cognitis aſſumat, ſed angulos, quos littera V diſignari, ex hisque angulis tam anomalias medias quam veras calculo inueſtiget; Hoc enim modo facile tabulam conficiet. Sumto enim pro lubitu angulo V, erit $x = V + \frac{b}{a}\int V$ et $z = V - \frac{b}{a}\int V + \frac{b^2}{4a^2}\int 2V - \frac{b^3}{12a^3}(\int 3V + \int 3V)$ Exempli gratia pro orbita martis ponatur V =

$V = 20^\circ$. Erit $lfV =$	9, 5340517
ſubtr. vt ſupra	5, 7197524
	3, 8142993
num. reſp.	6528″
hoc eſt.	1°, 48′, 48″
Erit ergo anomalia media	21°, 48′, 48″
et anomalia vera prope vera	18°, 11′, 12″
Nunc ſumatur $lf2V$	9, 8080075
ſubtr. $2l\frac{a}{b}$	2, 0673550
	7, 7407125
ſubtr. $l4$,	0, 6020600
	7, 1386525
ſubtrahatur inſuper	4, 6855749
	3, 4530776
num.	$284'' = 4', 44''$
Anomalia magis correcta $=$	18°, 15′, 56″
Denique ſumatur $f3V =$	8660254
et $3fV =$	10260606
	18920860
huius log.	10, 2769406
ſubtr. $3l\frac{a}{b}$	3, 1010325
	7, 1759081
ſubtr. $l12$	1, 0791812
	6, 0967269
ſubtr.	4, 6855749
	1, 4111520
num.	26″

Anomalia vera ergo est $18°, 15', 30''$ respondens anomaliae mediae $21°, 48', 48''$. Huic vero anomaliae mediae in tabulis respondet haec anomalia vera $18°, 16', 14''$.

§. 18. Progredior ergo ad alteram quaestionem, cuius initio mentionem feci, quae circa speciem ellipsis, in qua planeta circumfertur, eiusque positionem determinandam versatur. Ad haec inuenienda cognitum esse pono tempus periodicum planetae, quod sit $= T$. Deinde etiam data esse oportet tria loca heliocentrica planetae, cuiusmodi sint FS, GS, HS vna cum temporibus inter obseruationes elapsis. Ex locis ergo heliocentricis dantur anguli FSG et FSH, sitque $FSG = f$ et $FSH = g$. Praeterea fiat vt tempus periodicum T ad tempus inter duas obseruationes, ita 360 gradus, ad angulum qui est differentia anomaliarum mediarum inter easdem obseruationes. Cum igitur dentur differentiae anomaliarum mediarum inter obseruata planetae loca, sit ea quae est inter loca F et $G = m$, et quae est inter loca F et $H = n$. Ponatur nunc ratio AC ad CS vt 1 ad v; erit $\frac{b}{a} = v$; porro sit anomalia media loci $F = x$, et anomalia vera seu angulus ASF $= z$. Fig 2.

§. 19. His positis erit loci G anomalia media $= x + m$, et loci $H = x + n$; loci vero G anomalia vera erit $= z + f$ et loci $H = z + g$. Deinde sit $x = P + v\int P$; $x + m = Q + v\int Q$ et $x + n = R + v\int R$; erit cos. $z = \frac{\cos P + v}{1 + v \cos P}$ et cos. $P = \frac{\cos z - v}{1 - v \cos z}$, atque $\int P = \frac{\int z \sqrt{(1 - v^2)}}{1 - v \cos z}$.

Simili

Simili modo erit cof. $Q = \frac{\text{cof.}(z+f)-v}{1-v\,\text{cof.}(z+f)}$, et $\int Q = \frac{\int(z+f).\sqrt{(1-v^2)}}{1-v\,\text{cof}\,z+f)}$; atque cof. $R = \frac{\text{cof.}(z+g)-v}{1-v.\text{cof.}(z+g)}$ ac $\int R = \frac{\int(z+g).\sqrt{(1-v^2)}}{1-v.\text{cof.}(z+g)}$. Si nunc hi valores loco P, Q, R in tribus prioribus aequationibus, fubſtituantur, habebuntur tres aequationes, ex quibus tres incognitae x, z et v determinari debent. At hoc modo ſtatim deuenitur ad aequationes omnino irreſolubiles, ita vt hac via minime ad finem peruenire queamus. Quamobrem expediet potius hanc quaeſtionem vero proxime reſoluere.

§. 20. Ad hoc commodiſſime efficiendum iuuabit anomalias veras priori modo per ſeries exprimere. Erit ergo vt ſequitur.

$$z = P - v\int P + \tfrac{v^2}{4}\int 2P - \tfrac{v^3}{12}(\int 3P + 3\int P) + \text{etc.}$$
$$z+f = Q - v\int Q + \tfrac{v^2}{4}\int 2Q - \tfrac{v^3}{12}(\int 3Q + 3\int Q) + \text{etc.}$$
$$z+g = R - v\int R + \tfrac{v^2}{4}\int 2R - \tfrac{v^3}{12}(\int 3R + 3\int R) + \text{etc.}$$

Ex his aequationibus eliminando z erit

$$f = Q - P - v(\int Q - \int P) + \tfrac{v^2}{4}(\int 2Q - \int 2P) - \tfrac{v^3}{12}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)\ \text{etc.}$$
$$g = R - P - v(\int R - \int P) + \tfrac{v^2}{4}(\int 2R - \int 2P) - \tfrac{v^3}{12}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P)\ \text{etc.}$$

Priores vero aequationes eliminando x dabunt.

$$m = Q - P + v(\int Q - \int P)$$
$$n = R - P + v(\int R - \int P)$$ atque

Ponamus terminos in quibus ineſt v^2 et altiores poteſtates euaneſcere; erit coniungendis aequationibus $\frac{f+m}{2} = Q - P$ et $Q = P + \frac{f+m}{2}$, atque $R = P + \frac{g+n}{2}$. Per

poſte-

posteriores autem aequationes esto $= \frac{m-f}{2f(P+\frac{f+m}{2})-2fP}$

$= \frac{n-g}{2f(P+\frac{g+n}{2})-2fP}$. Ex his vero aequationibus oritur tang. $P = \frac{(m-f)f\frac{n+g}{2}-(n-g)f\frac{m+f}{2}}{(m-f)fv.\frac{n+g}{2}-(n-g)fv\frac{m+f}{2}}$ vbi $fv.$ finum versum denotat. Ex hac igitur aequatione iam proxime inueniri potest angulus P; hocque inuento simul quoque valor ipsius v proxime verus innotescit.

§. 21. Inuento hac ratione angulo P, ex eo determinetur valor ipsorum Q et R per aequationes $Q = P + \frac{f+m}{2}$ et $R = P + \frac{g+n}{2}$ deinde etiam valor ipsius v per aequationem $v = \frac{m-f}{2fQ-2fP}$. Hi vero valores hoc modo inuenti nondum sunt veri, sed tantum veris propinqui; propiores autem inuenientur sequentibus terminis non negligendis, erit nempe $\frac{f+m}{2} = Q - P + \frac{v^2}{8}(f2Q-f2P) - \frac{v^3}{24}(f3Q-f3P+3fQ-3fP)$ etc. ideoque $Q = P + \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(f2Q-f2P) + \frac{v^3}{24}(f3Q-f3P+3fQ-3fP)$ atque simili modo $R = P + \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(f2R-f2P) + \frac{v^3}{24}(f3R-f3P+3fR-3fP)$; in quibus expressionibus loco, P, Q, R et v ante inuenti valores substituantur post signum $=$; hocque pacto propiores pro Q et R valores habebuntur. Ponatur breuitatis gr. $Q = P + M$ et $R = P + N$ erit $v = \frac{m-M}{f(P+M)-fP} = \frac{n-N}{f(P+N)-fP}$. Ex quibus aequationibus inuenitur tang. $P = \frac{(m-M)fN-(n-N)fM}{(m-M)fv.N-(n-N)fv.M}$; unde quoque multo propior valor ipsius

ipſius P obtinetur. Quo iterum ſubſtituto tam pro Q et R quam pro v multo magis propiores valores oriuntur.

§. 22. Cum ſit $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2Q - \int 2P) + \frac{v^4}{24}(\int 3Q - \int 3P + 3\int Q - 3\int P)$ - etc. et $N = \frac{g+n}{2} - \frac{v^2}{8}(\int 2R - \int 2P) + \frac{v^4}{24}(\int 3R - \int 3P + 3\int R - 3\int P)$ - etc. ſi in his aequationibus loco P, Q, R, et v vltimo inuenti valoſurrogentur; tum proxime veri valores pro M et N habebuntur; et conſequenter proximi quoque pro Q et R, iterumque pro P et v. Harum ergo operationum reuolutiones, ſi toties repetantur, quoad valores ipſorum P et v non amplius mutentur; tum demum inuentos valores ipſos eſſe veros certum erit. His vero inuentis ex P et v per ſupra traditas regulas reperietur z, qui eſt angulus ſeu diſtantia loci primum obſervati F ab aphelio; v vero exprimit rationem excentricitatis orbitae ad ſemiaxem transuerſum ſeu diſtantiam mediam.

§. 23. Ad talem autem calculum ſuſcipiendum conducit plures tribus obſeruationes aſſumſiſſe, cum quo operationes inſtituendae magis confirmentur, tum quo obſeruationes maxime idoneae eligi queant. Habent autem eae obſeruationes, in quibus differentiae anomaliarum mediarum et verarum aequales ſunt, hoc incommodum, vt ſtatim in prima operatione dent $v = 0$. Quod ergo quo euitetur tales obſeruationes ſunt eligendae, in quibus differentiae anomaliarum ſint maximae.

Attamen ne hac quidem circumſpectione eſt opus, ſi quidem excentricitas praeter propter tantum fuerit cognita, quin imo prolubitu excentricitas poteſt fingi eaque initio pro v ſubſtitui, unde ſtatim propiores valores pro Q et R detegentur ex quibus tum operationes, vt ante, inſtitui poterunt.

§. 24. Exempli loco per iſthanc methodum determinemus poſitionem abſidum orbitae terrae, eiusque excentricitatem ex datis tribus ſequentibus obſeruationibus, quae ex Comment. Ac. R. Scient. Pariſ. A. 1720. ſunt decerptae.

Anno 1716	erat	Locus ☉
Mart. 20. d. $11^{b}.57',44''$		0S, 0°, 0′, 0″
Mai. 12. d. $11^{b}.55',53''$		1S, 21°, 44′, 35″
Iul. 28. d. $12^{b}.5',48''$		4S, 5°, 22′, 10″

Ex his obſeruationibus eſt differentia anomaliarum verarum inter primam et ſecundam obſeruationem, quam poſuimus $f = 51°, 44', 35''$
et differentia inter primam et tertiam ſeu $g = 125°, 22', 10''$

§. 25. Ad differentias anomaliarum mediarum inveniendas aſſumo pro tempore periodico T ſeu anno tropico 365 d. 5 h. 49′ 8″ ſeu 31556948″. Atque differentia temporum primae et ſecundae obſeruationis eſt 52 d. 23 h. 58′, 9″ ſeu 4579089″ hinc oritur differentia inter anomalias medias harum obſeruationum, quam poſuimus $m = 52°, 14', 17''$. Differentia vero temporum

porum primae et tertiae obſeruationis eſt 130d, 0^h, 8′, 14″ ſeu 11232494″. Ex quo fit differentia inter anomalias medias harum obſeruationum, quae erat $n = 128°$, 8′, 23″.

§. 26. Nunc ad calculum inſtituendum eſt

$$m - f = 29', 42'' = 1782''$$
$$\text{et } n - g = 2°, 46', 13'' = 9973''$$
$$\text{atque } \tfrac{m+f}{2} = 51°, 59', 26''$$
$$\text{et } \tfrac{n+g}{2} = 126°, 45', 16''$$

Deinde ad commoditatem calculi eſt

$$l\tfrac{n-g}{m-f} = 0,\ 7479181.$$
$$\text{Deinde eſt } \int\tfrac{n+g}{2} = 8012073$$
$$\text{atque } \int v.\tfrac{n+g}{2} = 15983867.$$
$$\text{Deinde eſt } l\int\tfrac{m+f}{2} = 9,8964761$$
$$\text{ad quem additus } l\tfrac{n-g}{m-f} = 0,7479181$$
$$10,6443942$$

$= l\tfrac{n-g}{m-f}\int\tfrac{m+f}{2}$, cui logarithmo reſpondet numerus hic:

44095498 ab hoc ſubtractus
8012073 $\int\tfrac{n+g}{2}$
36083425 $= \tfrac{n-g}{m-f}\int\tfrac{m+f}{2} - \int\tfrac{n+g}{2}$

qui numerus eſt numerator fractionis cui tP aequatur. Eſt vero lſv.$\tfrac{m+f}{2}$ 9,5845671 ad hunc $l\tfrac{n-g}{m-f}$

0,7479181 addatur
10,3324852 $= l\tfrac{n-g}{m-f}$ſ.v.$\tfrac{m+f}{2}$.

Huic reſpondet in tabulis ſinuum numerus

21502313 ab hoc ſubtrahatur
15983867 ſv. $\tfrac{n+g}{2}$
5518446 denominator fractionis.

Erit ergo tang. $P = \frac{36083425}{5518446} = 6,5387\ldots$

vnde prodit angulus $P = 81°, 18', 17''$.

Deinde eſt $l\frac{m-f}{2} = 2,9498777$,

atque $P + \frac{m+f}{2} = Q = 133°, 17', 43''$

cuius ſinus aequatur ſin. $46°, 42', 17'' = 7278292$,

et $\int P = 98885062$,

eſt igitur $\int(P+Q) - \int P = -2606770$,

ex quo valor ipſius v erit negatiuus, id quod indicat locum, quem calculus pro aphelio dare deberet non eſſe aphelion ſed periphelion. Vt vero v determinetur ſumatur ex tabula ſinuum logarithmus ſinus 2906770,

qui erit 9,4160988

ab hoc ſubtrahatur numerus ſupr. 4,6855749

log. denom. fract. pro v 4,7305239

ſubtr. 2,9498777

Hinc erit $l - v = -1,7806462$

ergo $\frac{100}{6035}$, ſeu diſtantia terrae mediae a $\odot$ eſt ad excentricitatem vt 6035 ad 100, quae ratio autem nondum eſt correcta. Si hinc antequam ſequentes correctiones adhibeamus, poſitionem abſidum inuenire velimus, prodibit pro $\simeq$ circiter $82°, 14'$ ſeu $2S, 22°, 14'$, qui locus a loco primae obſeruationis ſubtractus dat $9S, 7°, 46'$ pro loco periphelii; et $3S, 7°, 46'$ pro loco aphelii; qui locus iam prope congruit. Accuratiſſime autem haec quaeſita obtinebuntur, ſi tantum prima correctio adhibeatur.

§. 27.

§. 27. Ad correctionem autem instituendam notandum est loco anni tropici sidereum, quippe quo sol ab aphelio ad aphelium reuertitur, adhiberi debere, quo facto fiet $m = 52°, 14', 10''$ et $n = 128°, 8, 5''$, ideoque $m - f = 1775''$ et $n - g = 9955''$. Atque $\frac{m+f}{2} = 51°, 59', 22''$, et $\frac{n+g}{2} = 126°, 45', 8''$. Deinde est $P = 81°, 18', Q = 133°, 18'$ et $R = 208°, 3'$, vbi minuta secunda de industria negligo, quia ad M et N inuenienda nihil conferunt. Est vero $M = \frac{f+m}{2} - \frac{v^2}{g}(\int 2Q - \int 2P)$: et $N = \frac{n+g}{2} - \frac{v^2}{g}(\int 2R - \int 2P)$. Ex his prodit $M = 51°, 59', 17''$ et $N = 126°, 45', 4''$; et $m - M = 0°, 14', 53'' = 893''$, et $n - N = 1°, 23', 1'' = 4981''$, vnde erit $l \frac{n-N}{m-M} = 0,7464650$ atque per superiorem regulam $tP = \frac{(\frac{n-N}{m-M})\int M - \int N}{(\frac{n-N}{m-M})\text{f.v.M} - \text{f.v.N}}$. Ex hoc inuenitur ang. $P = 81°, 23', 0''$, et $P + M = 133°, 22', 17'' = Q$. Atque v iterum prodit valoris negatiui, estque $l - v = -1, 7815349$ seu est distantia media terrae a sole ad excentricitatem vt 6047 ad 100. Hi valores cum sint exactissimi, erit $z = 82°, 19', 16''$, qui angulus subtractus ab aequinoctio verno dat locum perigaei solis 9 S, $7°, 40', 44''$. Vnde erit Apogaeum solis in ♋, $7°, 40', 44''$. Tabulae vero Streetianae pro hoc tempore dant ♋. $7°, 52', 32''$ Si adhuc vnam correctionem quis vellet instituere, dubito an ea minuta secunda sit affectura.

ORBITAE SOLARIS DETERMINATIO.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

OPe methodi, quam in praecedente dissertatione expoſui, facile erit orbitam, quam terra motu annuo circa ſolem deſcribit, ſeu quod eodem redit orbitam ſolarem determinare, ex datis tribus locis ſolis ex terra viſis, vna cum temporum interuallis. Quamobrem ad orbitam ſolis quam exactiſſime definiendam, oportet vt ex obſeruationibus aſtronomicis tria ſolis loca eligamus, de quibus minime dubitare licet. Huiusmodi autem ſolis loca in eccliptica ſeu orbita ſua cum ex altitudinibus meridianis deriuare neceſſe ſit, conducet eiusmodi obſeruationes ad hunc vſum adhibere, quae circa aequinoctia ſint factae, eo quod his temporibus minimus error in longitudine oriatur. Reiiciendas igitur ad hunc finem eſſe iudico obſeruationes circa ſolſtitia factas, cum his temporibus etiam ex accuratiſſimis obſeruationibus de loco ſolis vix ad aliquot minuta prima certi eſſe poſſimus.

§ 2. Perluſtraui ergo in hunc finem *Flamſteedii* hiſtoriam coeleſtem, atque ex altitudinibus ſolis meridianis eius loca in eccliptica calculo deducere ſum anniſus.

ſus. Cum autem iſtae obſeruationes neque a refractionibus ſint purgate, neque omnes vt opinor ſint aeque bonae cenſendae, ex iis vix auſus ſum quippiam circa ſolis orbitam concludere. Cum vero prolegomena in tertio volumine huius operis perlegiſſem, deprehendi *Flamſteedium* huic ipſi inquiſitioni operam dediſſe, at methodum, qua is locum apogaei et excentricitatem orbitae ſolis aſſignare anniſus eſt, minime probare poſſum. Veriſſimas enim primo cenſet tabulas ſuas motus medii ſolis, de quibus omnino ad hoc inſtitutum exequendum dubitare debuiſſet; deinde vero locum apogaei tantum paulisper immutauit excentricitatis nulla habita ratione, quo vni vel alteri obſeruationi ſatisfaceret. Facile autem perſpicitur, hac methodo vix quicquam profici poſſe.

§. 3. Interim tamen obſeruationes, quibus *Flamſteedius* in hoc negotio eſt vſus, ipſe certiſſimas et exactiſſimas praedicat, neque ego de bonitate earum dubitandum eſſe exiſtimo, cum ſine dubio ad hoc inſtitutum eas ſelegerit, de quibus maxime erat certus. Hanc ob rem ego non dubito easdem obſeruationes vſurpare ad orbitam ſolis ope meae methodi determinandam, ex iis vero praeterea tales obſeruationes eligam, quae circa aequinoctia ſunt factae, quippe quae eo magis certae ſunt habendae. Obſeruationes ergo, quas ad hoc inſtitutum adhibere conſtitui, ſunt tres ſequentes, anno 1690 factae. Menſe ſcilicet Martio die 7 meridie locum ſolis exhibet in ♓, 27° 21′, 47″.

Dein-

Deinde eiusdem mensis die 14 erat sol in ♈ 4°, 17′, 18″. Atque tertio mense septembri die 15 erat sol in ♎ 2°, 45′, 37″. Quae solis loca ex altitudinibus meridianis exactissime observatis deduxit ipse *Flamstedius*.

§. 4. In his autem locis sol versabatur ipso puncto veri meridiei, dum per meridianum transiebat. Quare quo anomalias medias ex his temporibus recte concludamus oportet haec tempora ope aequationis temporis corrigere. Quo facto erunt vt sequitur.

Tempore medio	*Solis loca*
Mart. d. 7. 12^b. 8′, 24″	11 S, 27°, 21′, 27″
Mart. 14 d. 12^b. 6′, 15″	0 S, 4°, 17′, 18″
Sept. 15 d. 11^b. 51′, 27″	6 S, 2°, 45′, 37″

Harum observationum primam sumo igitur tanquam terminum, et pono eius anomaliam veram $= z$, atque anomaliam mediam $= x$. Praeterea $1 : v$ mihi denotat rationem distantiae mediae ad excentricitatem, adeo vt hae tres quantitates z, x et v ex his tribus observationibus debeant determinari. Ponatur secundae observationis anomalia vera $= z + f$, et media $= x + m$; tertiae vero observationis anomalia vera $= z + g$ et media $= x + n$. Quae quantitates f, g, m et n ex ipsis observationibus immediate determinantur.

§. 5. Differentia temporum inter primam et secundam observationem est ergo 6 d, 23^b, 57′, 51″, cui tem-

pori motus medius respondet $6^\circ, 53', 52''$. Cum autem inter ea aequinoctia circiter $1''$ sint retrogressa, erit differentia inter anomalias medias primae et secundae observationis $m = 6^\circ, 53', 51''$. Differentia vero inter loca solis est $6^\circ, 55', 31''$, quae similiter minuto secundo minuta ob praecessionem aequinoctiorum dat differentiam inter anomalias veras primae et secundae observationis $f = 6^\circ, 55, 30''$. Deinde differentia temporum primae et tertiae observationis est 191 d. $23^h, 43', 3''$ cui motus medius respondet $189^\circ, 12', 0''$: hinc motu aequinoctiorum $26''$ subtracto remanet differentia inter anomalias medias primae et tertiae observationis, $n = 189^\circ, 11', 34''$. Denique differentia inter solis loca primae et tertiae observationis $26''$ diminuta dat differentiam inter anomalias veras primae et tertiae observationis $g = 185^\circ, 23', 24''$.

§. 6. His praeparatis sequitur vt quantitatem anguli cuiusdam P, qui est anomalia excentri, definiamus, quo cognito facile omnia, quae requiruntur, determinare licet. Ostendi autem in praecedente mea dissertatione fore proxime tang. $P = \frac{\int \frac{m+f}{2} - (\frac{m-f}{n-g}) \int \frac{n+g}{2}}{\int v. \frac{m+f}{2} - (\frac{m-f}{n-g}) \int v. \frac{n+g}{2}}$ posito sinu toto $= 1$. Quo igitur ista expressio per calculum definiatur, sequenti modo operationes instituo.

$m = 6^\circ, 53', 51''$	$f = 6^\circ, 55', 30''$
$n = 189^\circ, 11', 34''$	$g = 185^\circ, 23', 24''$

Ex his erit

$$m-f=-1',39''=-99''$$
$$n-g=8°,48',10''=13690''$$

atque

$$-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315.$$

Praeterea eſt

$$\frac{m+f}{2}=6°,54',40''$$

et

$$\frac{n+g}{2}=187°,17',29''$$

Iam vero eſt

$$\int\frac{m+f}{2}=1203393$$

atque

$$\int\frac{n+g}{2}=-1269155$$

qui multiplicatus per $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315$ dat -9178. Erit ergo numerator fractionis, cui tang. P aequatur $=1194115$. Praeterea eſt ſv. $\frac{m+f}{2}=72661$ atque ſv. $\frac{n+g}{2}=19919130$ qui ductus in $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)=0,0072315$ dat $-\left(\frac{m-f}{n-g}\right)$ſv. $\frac{n+g}{2}=144045$. Vnde ſit denominator $=216706$. Diuidatur nunc factum ex numeratore in ſinum totum per denominatorem et prodibit tang. $P=55103000$. Quocirca inuentus eſt angulus $P=79°,42',51''$, qui autem valor tantum eſt vero proximus, et ſequenti modo corrigi debet.

§. 7. Ex valore ipſius P ſequentes litterae Q et R habebuntur, nempe cum ſit $P=79°,42',51''$, erit

$Q=P$

$Q = P + \frac{m+f}{2} = 86°, 37', 31''$, atque $R = P + \frac{g+n}{2} = 267°, 0', 20''$. Ex his valoribus erit $v = \frac{\frac{m-f}{2}}{\int Q - \int P} = \frac{\frac{n-g}{2}}{\int R - \int P}$, vnde patet valorem ipsius v fore negatiuum, id quod indicat distantiam primae obseruationis non ab apogaeo sed ab perigaeo inuentum iri. Erit ergo $l - v = l\frac{f-m}{2} - l(\int Q - \int P)$, in qua expressione notandum est, quia sinus cum angulis comparantur, a logarithmis sinuum subtrahi debere 4, 6855704, quo logarithmi minutorum secundorum obtineantur. Ob eandem rationem erit $\frac{f-m}{2}$ in minutis secundis $= 49, 5$ atque $l\frac{f-m}{2} = 1, 6946052$.

Iam vero est

$\int Q =$	9982658
et $\int P =$	9839292
ideoque $\int Q - \int P =$	143366
atque $l(\int Q - \int P) =$	8, 1564482
a quo subtrah. $=$	4, 6855704
restat	3, 4708778
subtr. a $l\frac{f-m}{2} =$	1, 6946052
erit $l - v =$	− 1, 7762726
seu $v =$	$\frac{59''}{591}$

hic vero valor sicut et reliqui correctione sequente habet opus.

§. 8. Ad hanc correctionem instituendam quaerantur valores litterarum M et N ex sequentibus formulis:

$$M = \frac{f+m}{2} + \frac{v^2}{g} \int 2P - \frac{v^2}{g} \int 2Q.$$
$$N = \frac{g+n}{2} + \frac{v^2}{g} \int 2P - \frac{v^2}{g} \int 2R.$$

vbi a logarithmis finuum fubtrahi debet 4, 6855704. Quia vero finguli finus multiplicati funt per $\frac{v^2}{g}$ cuius logarithmus eft $-4, 4556252$, a logarithmis finuum fubtrahi debet iſte logarithmus 9, 1412056 et numerus logarithmo reſiduo reſpondens dabit numerum minutorum ſecundorum. Compendii autem gratia non eſt opus vt anguli 2P, 2Q, 2R ad minuta ſecunda vsque ſumantur: tanta enim accuratio eſſet ſuperflua. His praemiſſis erit vt ſequitur:

$$\int 2P = \int 159°, 26' = \int 20°, 34'.$$
$$\int 2Q = \int 173°, 15' = \int 6°, 45'.$$
$$\int 2R = \int 534°, 1' = \int 5°, 59'.$$

Hinc erit

$l \int 2P = 9, 5456745$
fubtrahatur $9, 1412056$
$0, 4044689$

ergo $\frac{v^2}{g} \int 2P = 2\frac{1}{2}''$

Simili modo

$l \int 2Q = 9, 0701761$
fubtrahatur $9, 1412056$
$(-1), 9289705$

ergo $\frac{v^2}{g} \int 2Q = 0, 85''$
atque $\frac{v^2}{g} \int 2R = 0, 75''$

Ex his prodit

$M = 6°, 54', 42''$ et
$N = 187°, 17', 31''$.

§. 9.

§. 9. Quia valores litterarum M et N tam parum discrepant ab $\frac{m+f}{2}$ et $\frac{n+g}{2}$ correctio litterarum P et Q fere erit insensibilis; interim tamen ad vsum regulae a me traditae ostendendum calculum instituam. Ostendi igitur fore tang. $P = \frac{\int M - (\frac{m-M}{n-N})\int N}{\int v.M - (\frac{m-M}{n-N})\int v.N}$ posito sinu toto $= 1$. Ad hunc ergo angulum P detegendum sequenti modo operor

$$m - M = -50,69'$$
$$n - N = 1^\circ, 54', 3, 21'' = 6843, 21''$$
$$\text{ergo } -(\tfrac{m-M}{n-N}) = 0,0074073$$

Praeterea est

$$\int M = 1203003$$
$$\int N = -1296242$$
$$\text{ergo } -(\tfrac{m-M}{n-N})\int N = -9400$$
$$\text{ergo numerator} = 1193603$$

Deinde est

$$\int v.M = 72670$$
$$\int v.N = 19919123$$

Erit ergo

$$-(\tfrac{m-M}{n-N})\int v.N = 149306 \quad \text{ideoque}$$
$$\text{denominator} = 221976$$

Inuenitur ergo

$$\text{tang. } P = 53771000$$
$$\text{ideoque } P = 79^\circ, 27', 54''.$$

§. 10. Sumto ergo hoc valore pro vero angulo P erit $Q = P + M = 86°, 22', 36''$ et $R = P + N = 266°, 45', 25''$, atque ex his erit verus valor ipsius $v = \frac{n-M}{\int Q - \int P}$ $= \frac{n-N}{\int R - \int P}$, quae expressio vt ante debet tractari. Ex aequatione autem $v = \frac{n-N}{\int R - \int P}$ prodit $l - v = -1,7761733$ qui est verus valor ipsius v, atque distantia media ad excentricitatem vt 100000 ad 1674.

§. 11. Ex his nunc per praecepta tradita vtraque anomalia loci solis in prima obseruatione poterit definiri, in quo autem notandum est ob valorem ipsius v negatiuum a perigaeo anomalia computatas prodire. Erit autem primi solis loci obseruati 11 S, 27°, 21', 27'' anomalia media $x = P + v\int P$ et anomalia vera $z = P - v\int P + \frac{v^2}{4}\int 2P$ etc. ad quos valores inueniendos est

$P = 79°, 27', 54''$
$l\int P = 9,9926192$
subtr. $4,6855704$
$5,3070488$
$l - v = -1,7761733$
$l - v\int P = 3,5308755$
ergo $-v\int P = 3395'' = 56', 35''$
$l\int 2P = 9,5556433$
subtr. $4,6855704$
$4,8700729$
$l\frac{v^2}{4} = -4,1655562$
$l\frac{v^2}{4}\int 2P = 0,7045167$
ergo $\frac{v^2}{4}\int 2P = 5''$. Ex his ergo fit

$x =$

$x = 78, 31', 19'' = 2S, 18°, 31', 19''$
$z = 80°, 24', 34'' = 2S, 20°, 24', 34''$

§. 12. Cum igitur Sol fuerit A. 1690. Menſ. Martio $7^d, 12^b, 8', 24''$ in ecliptica 11 S, 27°, 21', 27'', erat illo tempore aequatio 1°, 53', 15'' addenda ad motum medium. Quamobrem illo tempore erat motus medius ſolis 11 S, 25°, 28', 12'' atque 1690 die 7 Martii ipſo meridie iuxta tempus medium erat motus medius ſolis 11 S, 25°, 27', 52''. Ergo A. 1689. completo ſeu initio anni 1690. erat motus medius ſolis 9 S, 20°, 24', 42'', qui locus ſi cum tabulis motus medii ſolis in Lexico Harris comparetur, deprehendetur 40'' maior, et hanc ob rem illae tabulae pro obſeruatorio Greenwicenſi augeri debent 40''. Quocirca erit

A. a C. N.	Motus medius ⊙
1701	9S, 20°, 44', 30''
1721	9S, 20°, 53', 34''
1741	9S, 21°, 2', 38''
1761	9S, 21°, 11', 42''
1781	9S, 21°, 20', 46''
1801	9S, 21°, 29', 51''

In tabula pro annis intermediis nihil eſt mutandum.

§. 13. Subtrahatur a vero loco ſolis
anomalia vera inuenta, 11 S, 27°, 21', 27''
prodibit 2 S, 20°, 24', 34''
locus perigaei orbitae ſolaris. 9S, 6°, 56', 53''

Quam-

Quamobrem apogaeum orbitae ſolaris erat
A. 1690. d. 7. Mart. in 3 S, 6°, 56′, 53″
atque initio anni 1690. in 3 S, 6°, 56′, 44″
atque initio anni 1701. in 3 S, 7°, 5′, 54″

Quare a loco apogaei ſolis ex tabulis aſtronomicis citatis inuento perpetuo ſubtrahi debet 34′, 16″, adeo vt in illis tabulis plusquam dimidio gradu apogaeum ſit nimis promotum.

§. 14. Logarithmum rationis excentricitatis ad diſtantiam mediam inuenimus $-1,7761733$, ita vt ſit diſtantia media ad excentricitatem, vt 100000 ad 1674 ſeu vt 5973 ad 100. Si nunc ille logarithmus iuxta regulam in ſequ. diſſ. expoſitam addatur ad $5,6154596$ prodibit $3,8392863$, cui reſpondet numerus 6907″ pro aequatione maxima, eſt ergo aequatio maxima $= 1°,55′,7″$.

§. 15. Reſtat vt definiatur anomalia media, cui maxima aequatio reſpondet; id quod per regulam meam ſequenti modo fiet.

Ad log. ſinus totius $10,0000000$
addatur $l\frac{v^3}{q} = -\ 5,9305799$
$4,0694200$
qui eſt log. ſinus anguli $14'''$
eſt ergo $q = 14'''$.
Deinde ad $5,3144295$
addatur $lv = -\ 1,7761733$
$3,5382562$

cui reſpondet numerus 3454″ ſeu 57′, 34″. Quamobrem erit anomalia media cui aequatio maxima reſpondet 90°, 57′, 34″; atque anomalia vera, cui aequatio maxima reſpondet, erit 89°, 2′, 27″. SO-

SOLVTIO PROBLEMATVM QVORVNDAM ASTRONOMICORVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

Problema 1.

Data planetae aequatione maxima, inuenire orbitae eius excentricitatem.

Solutio.

Conuertatur aequatio maxima in minuta secunda, sitque eorum numerus $= m$; dico fore distantiam planetae a Sole mediam ad excentricitatem vt 412533 ad numerum m; si quidem aequatio non fuerit nimis magna. At si aequatio admodum fuerit ingens, posita ratione distantiae mediae ad excentricitatem vt 1 ad v, erit $v = \frac{m}{412533} - \frac{m^7}{32(412533)^7}$. Q.E.I.

Problema 2.

Data excentricitate orbitae planetaris, inuenire aequationem maximam.

Solutio.

Sit 1 ad v vt distantia planetae a Sole media ad excentricitatem, et sit m numerus minutorum secundorum aequationis maximae, qui quaeritur, dico fore $m = 412533\left(v + \frac{v^7}{32}\right)$; vel per logarithmos erit log. $m =$

$5,6154596 + l(v + \frac{v^7}{32})$. Vbi notandum eſt, niſi excentricitas fuerit vehementer magna loco quantitatis $v + \frac{v^7}{32}$ ſumi poſſe tantum v. Q. E. I.

Problema 5.

Data excentricitate orbitae planetaris, inuenire anomaliam mediam, cui aequatio maxima reſpondet.

Solutio.

Sit 1 ad v vt diſtantia media ad excentricitatem, quae ergo ratio datur et proinde v. Multiplicetur ſinus totus per $\frac{v^3}{4}$, et factum erit ſinus cuiusdam anguli ex tabulis inueniendi: ſit hic angulus q graduum. *Haec vero operatio commodius per logarithmos inſtituetur.*

Deinde quaeratur logarithmus quantitatis $v - \frac{v^7}{32}$, vel tantum ipſius v, ex tabulis logarith. num. naturalium, ſi fuerit v admodum paruum, iſte logarithmus addatur ad hunc 5, 3144295, et logarithmi, qui prodit, quaeratur numerus reſpondens, qui ſit n; vbi notetur n'' eſſe dimidiam partem aequationis maximae; ita vt, ſi aequatio maxima iam fuerit inuenta hac poſteriori operatione nequidem ſit opus. Dico fore anomaliam mediam quaeſitam $90^\circ + q^\circ + n''$. Q. E. I.

DE

DE MINIMIS OSCILLATIONIBVS CORPORVM TAM RIGIDORVM QVAM FLEXIBILIVM. METHODVS NOVA ET FACILIS.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

QVae ad oſcillationes corporum rigidorum perti- Tabb. V. VI.
nent problemata, ea Geometrae ad inuentionem centri oſcillationis referre ſunt ſoliti. Cum enim corpora rigida figuram ſuam, quantumuis etiam a potentiis ollicitentur, immutatam retineant; ad eorum oſcillationes determinandas ſufficit eorum oſcillationis centrum noſſe. Hac enim ratione tota quaeſtio reducitur ad oſcillationes penduli ſimplicis, cuius motus iam ſatis cognitus et extra omne dubium eſt poſitus. Omnes idcirco circa motum oſcillatorium corporum rigidorum quaeſtiones eo redeunt, vt inueniatur longitudo penduli ſimplicis, quod iisdem temporibus oſcillationes ſuas abſoluat; hac enim cognita ſimul quoque motus oſcillatorius corporum propoſitorum innotescit.

§. 2. Quod vero ad oſcillationes corporum flexibilium attinet, de iis duplex facienda eſt quaeſtio. Nam antequam penduli ſimplicis iſochroni longitudo determi-

nari potest, figura, quam huiusmodi corpora flexibilia inter oscillandum induunt, debet definiri; nisi enim haec fit cognita, quid potentiae in ea agentes efficiant, assignari nequit. Ad motum igitur oscillatorium corporum flexibilium inueniendum requiritur, vt figura eorum, quam quouis momento inter oscillandum induunt, determinetur; quo facto facile erit longitudinem penduli simplicis isochroni assignare.

§. 3. Huius generis problemata iam quaedam a Geometris sunt pertractata, quorum primum, cuius Cl. *Taylorus* elegantem dedit solutionem, circa oscillationes chordarum musicarum tensarum versatur, quibus oscillationibus soni eduntur. In hacque tractatione Cl. *Taylorus* primo curuam, quam chorda vibrata format, determinauit; ex eaque postmodum numerum oscillationum, quem data chorda dato tempore absoluit, definiuit.

§. 4. Huc quoque pertinet problema de oscillationibus funis seu catenae perfecte flexilis, cuius praeterito anno Cl. *Bernoullius* solutionem huc transmisit; quodque idem problema postmodum alia metodo satis breui et facili resolui, pariter hic coram societate praelecti. In vltimis vero, quas ad me dedit Cl. *Bernoullius*, litteris mentionem fecit oscillationum laminae elasticae altero termino paricti firmo infixae, atque aequationem mihi perscripsit a se pro curua, quam lamina oscillans facit, inuentam esse; de qua autem adhuc anceps haerebat, vtrum conueniat, an secus: propterea quod haec quaestio tam sit intricata, atque in ea resoluenda errorem committere admodum sit procliue.

§. 5.

§. 5. Ego quidem, quamuis valde facilem et latepatentem essem adeptus methodum curuam funis perfecte flexilis oscillantis determinandi; tamen ex ea parum vtilitatis ad curuam laminae elasticae oscillantis inueniendam haurire potui. In mentem igitur mihi venit alia methodus latissime patens atque staticis tantum principiis nitens, cuius ope non solum has de oscillationibus laminae elasticae et funis suspensi quaestiones mira facilitate resolui, sed omnia quae ad oscillationes pertinent promptissime expedire possum.

§. 6. Aliis enim, iisque maxime diuersis methodis sunt vsi auctores, qui de centro oscillationis seu oscillationibus corporum rigidorum egerunt, alias etiam *Cl. Bernoullius* et ego methodos ad oscillationes funis suspensi flexilis inueniendas adhibuimus. Ex diuersis quoque principiis Clarissimi Viri *Taylorus*, *Ioh Bernoulli*, et *Hermannus* oscillationes chordae vibratae deriuauerunt. Ea vero methodus, qua problema oscillationum laminae elasticae parieti fixo infixae resolui, ita est comparata, vt eius ope quoque supra memorata problemata omnia summa cum facilitate resolui queant.

§. 7. Quo igitur hanc methodum, qua omnia huiusmodi problemata circa oscillationes corporum tam rigidorum quam flexibilium resolui possunt, commodissime exponam, considero ante omnia pendulum simplex, et oscillationes, quas peragit: quippe ad quod quorumque corporum oscillationes sunt reducendae. Contemplor autem ad hoc institutum oscillationes minimas tan-

tum, eo quod hae ſunt inter ſe iſochronae tam in pendulo ſimplici, quam in corpore quocunque: cum maiores oſcillationes cum pendulo ſimplici rariſſime comparari queant.

Figura 1. §. 8. Sit ergo OM pendulum ſimplex in O ſuſpenſum et in M habens pondus alligatum, cuius maſſa ſit M. Declinet hoc pendulum a ſtatu quietis ſeu recta verticali OA angulo infinite paruo AOM, ita vt arculus MA pro recta horizontali haberi queat; voceturque longitudo huius penduli $OM = f$; et ſpatiolum AM corpori M percurrendum, donec in ſtatum quietis perueniat $= k$. Vis grauitatis porro, quae corpus M deorſum vrget, aequatur ipſius ponderi ſeu ipſi M. Ex hac vero per reſolutionem oritur vis corpus verſus MA vrgens $= \frac{a\,m.\,M}{M\,m} = \frac{AM.M}{OM}$, $= \frac{Mk}{f}$, facto triangulo M*am* ſimili triangulo OAM.

§. 9. Ponatur haec vis ſollicitans corpus M ſecundum $MA = g$; erit $g = \frac{M.k}{f}$, vnde oritur $f = \frac{Mk}{g}$. Si igitur corpus M ſecundum directionem MA vrgeatur vi g, eique percurrendum ſit ſpatium $MA = k$, donec in ſtatum quietis perueniat; erit tempus, quo ex M in A peruenit, aequale tempori deſcenſus penduli longitudinis $\frac{Mk}{g}$; ſi quidem dum corpus per MA incedit, vis ad A vrgens proportionalis fuerit diſtantiae corporis ab A.

§. 10. Ex his ergo perſpicitur, quomodo, ſi detur maſſa corporis et via percurrenda atque vis corporis ſecundum hanc viam ſollicitans, inueniri debeat longitudo

gitudo penduli ſimplicis eodem tempore deſcenſum ſeu ſemioſcillationem abſoluentis, quo illud corpus viam ſuam abſoluit. Illa autem via eſt ſpatium, quod corpus percurrere debet, donec in ſtatum quietis perueniat. Dum vero corpus in hoc ſpatio mouetur, vis illud ſollicitans ſemper eſt proportionalis diſtantiae a ſtatu quietis, ſi quidem minimae oſcillationes fuerint iſochronae. Id quod ex caſibus deinceps euoluendis patebit, in quibus vis ſingulas particulas vrgens proportionalis quoque reperietur diſtantiis ipſarum a ſtatu quietis.

§. 11. Si igitur plura corpora ſimul in ſtatum quietis peruenire debeant, oportet vt in iis quantitas $\frac{Mk}{\varepsilon}$ ſit eadem. Quocirca potentiae ea corpora ſecundum directionem, in qua mouentur, ſollicitantes debent eſſe in ratione compoſita ex rationibus maſſarum et ſpatiorum percurrendorum, quibus confectis in ſtatum quietis perueniant, ſeu in quo ſitu in quiete permanere poterunt.

§. 12. In omni ergo corpore oſcillationes peragente ſpectandus eſt ante omnia ipſius ſtatus aequilibrii, in quo ſi ſemel fuerit in quiete, in eo perpetuo ſit permanſurum. Hic enim ſtatus reſpondebit ſitui penduli ſimplicis verticali in quo ſolo quiescere poteſt. Deinde illud corpus parumper ex hoc ſtatu eſt deturbandum, et inquirendum, quanto interuallo quaeque particula ab eo loco, quem in ſtatu aequilibrii occupabat, diſtet; quod erit ſpatium percurrendum. Denique

nique, quo omnes particulae iterum simul in situm aequilibrii perueniant, debet esse potentia, quae vnamquamque particulam secundum ipsius viae percurrendae directionem sollicitat, vt factum ex massa particulae in viam percurrendam.

§. 13. At si singulae corporis oscillantis partes actu ab aliis viribus atque in aliis directionibus sollicitentur, tum loco illarum virium aliae substitui debent, quae singulas partes secundum spatiorum percurrendorum directiones sollicitent, et proportionales sint factis ex massis ipsarum particularum et viis percurrendis. Haeque potentiae tantae sunt accipiendae, vt omnes aequinaleant ipsis potentiis corpus actu sollicitantibus.

§. 14. Cum igitur hae potentiae substituendae ipsis potentiis corpus sollicitantibus aequiualere debeant, ex statica constat, si earum loco potentiae ipsis aequales at secundum directiones contrarias agentes collocentur, tum corpus esse debere in aequilibrio. Quamobrem iste status aequilibrii erit determinandus, quo definito tempus innotescet, quo corpus sibi relictum oscillationes singulas absoluat. Hac ergo ratione tota circa oscillationes corporum versans disquisitio ad statica principia reducitur. Quae omnia ex sequentibus casibus melius percipientur.

Fig. 2. §. 15. Sit virga rigida grauitate seu potius omni materia destituta et quatuor ponduscülis A, B, C, D onusta; eaque circa O oscillationes peragat, dum in situm aequilibrii O*d* accedit, ex eoque in alteram partem recedit. Huius-

Huiusque penduli compositi requiritur tempus vnius cuiusque oscillationis. Ponamus longitudinem penduli simplicis isochroni esse f, quod scilicet pendulum eodem tempore descensum absoluat, quo tempore virga OD in situm Od pertingit.

§. 16. Quo autem virga OD in situm Od transferatur corpusculis A, B, C, et D percurrenda sunt spatia Aa, Bb, Cc, et Dd, quae ob angulum DOd infinite paruum, pro lineis horizontalibus haberi poterunt. Omnia vero haec corpuscula in Ad simul eodemque tempore, quo pendulum f descensum absoluit, peruenient, si ea secundum directiones Aa, Bb, Cc et Dd vrgeantur viribus $\frac{A.Aa}{f}$, $\frac{B.Bb}{f}$, $\frac{C.Cc}{f}$ et $\frac{D.Dd}{f}$ respectiue. Quare si his potentiis aequales in directionibus contrariis $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et $D\delta$ applicentur, hae virgam AD in hoc situ AD in aequilibrio seruabunt.

§. 17. Singula vero corpuscula A, B, C et D reipsa vi grauitatis deorsum tendunt viribus ipsis eorum massis proportionalibus. Quare hae potentiae deorsum trahentes cum illis horizontalibus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ et $D\delta$ in aequilibrio debent esse constitutae. At momentum ponderum A, B, C, D ad virgam circa O conuertendam est $= A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd$. Momentum vero potentiarum horizontalium est $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{f}$. Quae momenta cum debeant esse aequalia prodibit $f = \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO + D.Dd.DO}{A.Aa + B.Bb + C.Cc + D.Dd}$, quae est longitudo penduli simplicis isochroni cum pendulo composito OD.

§. 18. Sunt autem ſpatia ſingulis corporibus percurrenda Aa, Bb, Cc, Dd diſtantiis ipſorum a polo O proportionalia. Quocirca erit $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2 + D.DO^2}{A.AO + B.BO + C.CO + D.DO}$ Quae expreſſio eſt ea ipſa, quae ex regulis iam ſatis cognitis pro diſtantia centri oſcillationis a polo O inuenitur. Eſt enim diſtantia centri oſcillationis a polo O nil aliud, niſi longitudo penduli ſimplicis ipſi compoſito OD iſochroni. Cognita ergo longitudine f innoteſcit numerus oſcillationum, quem hoc pendulum compoſitum OD dato tempore abſoluit.

Figura 3. §. 19. Sin autem pondulcula, quae virgis rigidis inter ſe connexa circa polum O oſcillari ponuntur, non fuerint in linea recta ſita, primo caſus aequilibrii eſt ſpectandus, qui ſit is, qui in figura repraeſentatur, in qua tria pondulcula A, B, C ex polo O ſunt ſuſpenſa. Horum ergo ponduſculorum centrum grauitatis erit poſitum in recta verticali OF. Quare ſi demittantur ad hanc verticalem perpendicula AE, BF et CG erit $A.AE + B.BF = C.CG$.

§. 20. Conſideretur iam triangulum ABC circa polum O infinite parum conuerti, ita vt A in a, B in b, atque C in c perueniat, erunt haec elementa Aa, Bb, Cc inter ſe vt AO, BO et CO. Sit iam f longitudo penduli ſimplicis deſcenſum eodem tempore abſoluentis, quo tria pondulcula ex ſitu abc in ſitum ABC pertingunt. Hoc poſito erit vis quae corpus A in a ſecundum aA vrget $= \frac{A.Aa}{f}$; ſimiliterque vis corpus B iuxta bB vrgens $= \frac{B.Bb}{f}$, et vis corpus C per cC vrgens $= \frac{C.Cc}{f}$. Harum ergo virium momentum in polum O erit

erit $= \frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f}$. Momentum vero, quod oritur ex ponderibus corporum A, B, C in a, b, c sitorum in O, est $= A.AE + B.BF - C.CG + \frac{A.OE.Aa}{AO} + \frac{B.OF.Bb}{BO} + \frac{C.OG.Cc}{CO}$, in qua formula $A.AE + B.BF - C.CG$ est $= 0$, propterea quod ABC est status aequilibrii.

§. 21. Cum igitur haec duo momenta inter se debeant esse aequalia erit $\frac{A.Aa.AO + B.Bb.BO + C.Cc.CO}{f} = \frac{A.Aa.OE}{AO} + \frac{B.Bb.OF}{BO} + \frac{C.Cc.OG}{CO}$. Quia autem Aa, Bb, Cc, sunt ipsis AO, BO et CO proportionalia, erit $\frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{f} = A.OE + B.OF + C.OG$. Ex qua aequatione oritur $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{A.OE + B.OF + C.OG}$. Exprimit autem $\frac{A.OE + B.OF + C.OG}{A + B + C}$ distantiam centri gravitatis corporum A, B, C a polo O, quod si ponatur in M, erit longitudo penduli simplicis isochroni $f = \frac{A.AO^2 + B.BO^2 + C.CO^2}{(A + B + C).OM}$, quae quantitas dat quoque distantiam centri oscillationis a polo O. Ex hac ergo nascitur sequens regula pro centro oscillationis corporis cuiuscunque rigidi circa punctum fixum oscillantis inueniendo. *Quaelibet particula multiplicetur in quadratum distantiae suae a polo, et horum factorum summa diuidatur per massam totius corporis in distantiam centri grauitatis a polo ductam; quotusque dabit distantiam centri oscillationis a polo seu longitudinem penduli simplicis isochroni.* Haecque regula sufficit ad oscillationes quorumcunque corporum rigidorum circa polum fixum determinandas.

§. 22. Hic quidem posuimus omnes corporis oscillantis partes cum polo O in eodem sitas esse plano,

que in eodem plano oſcillationes abſoluere; nihilo vero minus haec eadem regula valet, ſi vel omnes partes non in eodem plano fuerint poſitae, vel oſcillationes non in eo plano peragantur. His enim in caſibus non tantum polus ſeu punctum debet conſiderari, ſed axis ſeu linea horizontalis, circa quam oſcillationes abſoluuntur. Hic enim iterum quaeuis particula in quadratum diſtantiae ſuae ab axe eſt multiplicanda, et ſumma omnium factorum per factum ex tota oſcillantis corporis maſſa in diſtantiam centri grauitatis ipſius ab axe diuidenda, ex qua diuiſione ortus quotus dabit centrum oſcillationis ſeu potius longitudinem penduli iſochroni. Hinc inuenitur Theorema Hugenianum pro globo ex materia homogenea conſtante AB circa polum O oſcillante,
Figura. 4. quod ſcilicet centrum oſcillationis Z ſeu longitudo penduli ſimplicis iſochroni ſit $OZ = OC + \frac{2}{5}\frac{AC^2}{OC}$, exiſtente C centro globi.

§. 23. Dantur autem praeter motum oſcillatorium corporum rigidorum circa polum fixum, ex quo ſunt ſuſpenſa, infinita alia oſcillationum genera. Quorum vnicum ſatis notum, neque tamen a quoquam, quantum mihi conſtat expoſitum, hac methodo pertractabo, antequam ad corpora flexibilia progrediar. Conſtat autem hoc oſcillationum genus in motu reciproco curuarum vel corporum quorumque baſi conuexa ſuper plana ſuperficie vacillantium. Quem motum, ne cum motu oſcillatorio modo expoſito confundatur, vacillatorium appellari conuenit. In hoc motu vero notandum eſt pla-

planum, ſuper quo ſit, aliquantulum aſperum eſſe ponendum, ne curuae de loco ſuo inter vacillandum dimoueri queant, quod eueniret ſi planum maxime foret politum.

§. 24 Sit igitur BAD baſis ſeu ſectio verticalis corporis ſuper plano EF vacillantis, cuius in imo puncto A curuaturae radius ſit AC; in hocque ſitu ſit corpus in aequilibrio, atque M ſit particula quaecunque huius corporis. Quoniam vero in hoc ſitu BAD corpus ponitur eſſe in aequilibrio, erit eius centrum grauitatis in recta verticali AC ſitum. Quamobrem erit ſumma omnium factorum ex particulis M in diſtantias ipſarum MQ a verticali AC = o, ſumtis nempe diſtantiis particularum ad alteram partem rectae AC poſitarum negatiuis, ſeu erit $\int M.MQ = o$. Iam vacillet hoc corpus parumper, vt veniat in ſitum bad, in quo α eſt punctum contactus corporis cum plano EF et radius αc; quo motu punctum A in a perueniet, et M in m, ita vt ſit ang. $M\alpha m$ ſeu $MNm = C\alpha c$ ſeu $AC\alpha$ atque elementum Mm normale erit ad rectam $M\alpha$ vel MA. Figura 5.

§ 25. Poſito nunc corpore BAD in ſitu bad, determinari debet vis id rurſus in ſtatum quietis BAD reſtituens, quae reperietur ſumendis omnibus momentis, quae ſingulae particulae M habent ad corpus circa α conuertendum. Momentum vero particulae M in m poſitae erit $M.p\alpha$ demiſſo ex m in EF perpendiculo mp. Cum autem ſit $CA : A\alpha = AM : Mm$; erit $Mm = \frac{AM.A\alpha}{CA}$;

vnde erit $AM:PM = Mm:Pp$ seu $Pp = \frac{PM \cdot A\alpha}{CA}$. Ex his fit $p\alpha = PA + A\alpha - Pp = PA + \frac{(CA - PM)A\alpha}{CA} = PA + \frac{CQ \cdot A\alpha}{CA}$. Particulae ergo M momentum est $M.PA + \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$. Atque summa omnium momentorum erit $= \int M.PA + \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA} = \int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$, quia $\int M.PA$ aequale est nihilo.

§. 26. Ponamus iam longitudinem penduli isochroni $= f$, erit vis punctum m in M sollicitans $= \frac{M.Mm}{f} = \frac{M.AM.A\alpha}{CA.f}$ huiusque vis momentum in $\alpha = \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$. Omnium ergo horum momentorum summa erit $\int \frac{M.AM^2.A\alpha}{CA.f}$ seu $\frac{A\alpha}{CA.f} \int M.AM^2$, ob $A\alpha$, CA et f constantes quantitates. Haec vero momentorum summa aequalis esse debet summae momentorum inuentae $\int \frac{M.CQ.A\alpha}{CA}$ seu $\frac{A\alpha}{CA} \int M.CQ$, vnde habebitur ista aequatio $f \int M.CQ = \int M.AM^2$, ex qua fit $f = \frac{\int M.AM^2}{\int M.CQ}$, quae expressio dat longitudinem penduli simplicis isochroni, quod iisdem temporibus oscillationes absoluit, quibus corpus BAD super plano EF vacillationes peragit. Quocirca hinc tempus cuiusque vacillationis definire licet.

§. 27. In formula autem inuenta designat $\int M.CQ$ distantiam centri grauitatis corporis a C in massam totius corporis ductam. Si igitur G fuerit centrum grauitatis atque massa totius corporis ponatur C, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.CG}$. Ponamus autem ad comparationem instituendam corpus in situ deorsum conuerso circa A oscillationes absoluere, erit longitudo penduli simplicis isochroni $= \frac{\int M.AM^2}{C.AG}$. Data ergo hac

hac penduli longitudine per priorem regulam inuenta, quae ſit F; erit $F.AG = f.CG$ atque $f = \frac{F.AG}{CG}$. Si igitur inuentae fuerint oſcillationes corporis ex A ſuſpenſi, innoteſcent ſimul vacillationes ſuper plano EF.

§. 28. Sit machina vacillans baſin BAD habens omni materia deſtituta praeter vnicum ponduſculum M in axe CA ſitum. Vacillante ergo hac machina ſuper plano EF, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{AM^2}{CM}$. Vnius igitur vacillationis tempus erit vt $\frac{AM}{\sqrt{CM}}$. Atque quo dato tempore, eo ſcilicet quo pendulum ſimplex f oſcillatur, vacillationes abſoluantur, debet eſſe $AM^2 = f.AC - f.AM$. Quare inuenitur $AM = -\frac{1}{2}f + \sqrt{(\frac{1}{4}f^2 + f.AC)}$. Figura 6.

§. 29. Conſideremus iam ſegmentum circulare BAD ex vniformi conſtans materia vacillare ſuper recta EF. Ponatur $AC = a$; $AH = b$; $AP = x$, erit applicata $PM = \sqrt{(2ax - xx)}$. Iam in elemento $MPpm$, capiatur particula μ exiſtente $P\mu = z$; erit iſta particula $= dx\,dz$, quae ducta in $A\mu$ quadratum dat $dx\,dz(x^2 + z^2)$, cuius integrale poſito x conſtante eſt $x^2 z\,dx + \frac{z^3 dx}{3}$. Fiat $z = \sqrt{(2ax - xx)}$, erit ſumma factorum ex ſingulis elementi mP particulis in quadrata diſtantiarum ab $A = dx(\frac{2ax}{3} + \frac{2xx}{3})\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius duplum $\frac{4x\,dx}{3}(a + x)\sqrt{(2ax - xx)}$ reſpondebit toti elemento $MMmm$. Huius differentialis integrale denuo ſumtum dat $3a^2 \int dx \sqrt{(2ax - xx)} - (\frac{x+2a}{5})(2ax - xx)^{\frac{3}{2}}$. Ponatur $x = b$ prodibit $\frac{3}{5}AH^2$ pro toto ſegmento $BAD = \frac{3a^2}{5}.BA$ $DE - BP^2 - \frac{1}{3}AH.BH^2$. §. 30.

§. 30. Ad ſummam vero ipſarum M.CQ inueniendam, multiplicetur elementum $MMmm = 2dx\sqrt{(2ax - xx)}$ per $CP = a - x$, prodibit $2(a-x)dx\sqrt{(2ax - xx)}$, cuius integrale eſt $\frac{2}{3}(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}$ in quo ſi ponatur $AP = AH$, habebitur $\int M.CQ$ pro toto ſegmento $BAD = \frac{2}{3}BH^3$. Longitudo ergo penduli ſimplicis iſochroni erit $\frac{cc^2.BADB}{4BH^3} - \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}AH$. Si fiat ſegmentum hoc aequale ſemicirculo, fient $BH = a$, $AH = a$, poſitaque ratione inter diametrum et peripheriam $1 : \pi$ erit area ſemicirculi $= \frac{\pi aa}{2}$. Pro ſemicirculo ergo vacillante erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni $= \frac{3}{8}\pi a - 2a$, ſeu quam proxime $\frac{47}{28}a$. Semicirculus ergo radii 2061 ſcrup. ped. Rhenani ſingulis minutis ſecundis vacillationes abſolvet.

§. 31. Si tantum arcus circuli BAD materia vniformi conſtet, reperietur $\int M.AM^2 = 2a^2(BAD - BD)$; atque $\int M.CQ = a.BD$. Ergo longitudo penduli ſimplicis iſochroni erit $= \frac{2a.BAD}{BD} - 2a$. Aequetur arcus toti ſemiperipheriae erit longitudo penduli iſochroni $= a(\pi - 2) = \frac{8}{7}a$ quam proxime. Minore ergo tempore ſemiperipheria quam ſemicirculus vacillationes abſoluit. Ceterum in genere notari debet de his motibus reciprocis, centrum grauitatis ſemper infra centrum baſis C ſitum eſſe debere: nam ſi in ipſo centro C centrum grauitatis exiſtat, corpus ex ſtatu quietis deturbatum non reſtituetur, ſed quieſcet. At ſi ſupra C centrum grauitatis exiſtat corpus non ſolum non motu reciproco feretur, ſed penitus ſubuertetur.

§. 32.

§. 32. His de corporibus rigidis expositis pergo ad oscillationes corporum flexibilium, quae vel sunt perfecte flexibilia, vel ita comparata, vt ad ea flectenda vi sit opus, cuiusmodi corpora elastica vocantur. Ex quo intelligitur corpora perfecte flexibilia ex elasticis oriri, si vis elastica euanescat. De huiusmodi corporibus igitur, antequam eorum oscillationes possunt determinari, necesse est, vt figurae, quas inter oscillandum induunt, definiantur. Quod quo secundum in principio tradita principia fieri queat, ante necesse est, vt figura definiatur, quam huiusmodi corpus a quibuscunque potentiis sollicitatum induere debet, id quod prolixe satis in *Tom. III. Comment.* sum persecutus. Quamobrem breuitatis causa propositionem primariam ibi traditam hic repetam.

§. 33. Sit Bα virga recta elastica in B fixa, quae tum a potentiis quibuscunque in singulis punctis applicatis, tum etiam a duobus ponderibus E et F in altero extremo termino A appensis induat figuram BMA, cuius naturam aequatione exponere oportet. Sumatur recta AC pro axe, in eaque abscissa $AP = x$, sitque applicata $PM = y$. Ponamus singulis punctis M duas potentias esse applicatas, quarum altera in directione verticali MP agat, altera in directione horizontali MQ. Sit summa omnium potentiarum verticalium singulis arcus AM punctis applicatarum P; et summa omnium horizontalium eidem arcui applicatarum Q. Praeterea sit vis elastica in $M = V$. Cumque eadem vis elastica sit eo maior, quo magis virga curuatur, erit vis elastica in M vt V diuisum per radium osculi in M, quem po- Figura 8.

namus $= r$. His positis natura curuae BMA hac continebitur aequatione $\frac{V}{r} = Ex + Fy + \int P dx + \int Q dy$. Si ergo virga fuerit perfecte flexilis; euanescet V, ideoque haec aequatio $Ex + Fy + \int P dx + \int Q dy = 0$, dabit naturam curuae quaesitae.

Figura 9. §. 34. Sit funis perfecte flexilis B*a* ex B suspensus, qui ad oscillationes minimas peragendas sit impulsus, ita vt in medio cuiusque oscillationis in situm B*a* perueniat, ad quam legem quascunque oscillationes vt libet initio irregulares reduci experientia demonstrat. Sit nunc BMA figura, quam funis inter oscillandum induit, quae, quia infinite parum a verticali B*a* declinat, erit A*a* linea horizontalis, et arcus BMA $=$ B*a*. Exponant applicatae N*m* curuae DN crassities funis in respondentibus locis M. Ex A ducatur verticalis AP, voceturque AP $= x = am$, et PM $= y$ atque N*m* $= q$. Erit ergo quam proxime arcus AM $=$ AP $= x$, atque hinc pondus elementi arcus AM erit $= q dx$. Ponatur A*a* $= b$, et M*m* $= u$, erit $y = b - u$.

§. 35. Sit porro longitudo penduli simplicis isochroni $= f$; necesse est vt quaeuis particula M, quae est $q dx$ sollicitetur versus M*m* vi, quae est $= \frac{q u dx}{f}$, est enim M*m* $= u$ spatium particulae M percurrendum, quo in statum aequilibrii perueniat. Eundem igitur hae potentiae in singulis punctis applicatae effectum producent, quem vis grauitatis, qua singulae particulae funis deorsum vrgentur. Quamobrem si in singulis punctis M potentiae $\frac{q u dx}{f}$ versus contrariam plagam MP applicatae concipian-

cipiantur, funis BMA ab his potentiis et propria grauitate sollicitatus erit in aequilibrio. Cum autem P denotet summam omnium potentiarum MP, erit $P = \int \frac{qudx}{f}$ Pondus porro particulae M est $= qdx$ et secundum MQ tendit, quae directio illi, quam in generali propositione assumsimus est contraria; hanc ob rem erit $Q = -fqdx$. E vero et F euanescent. Ex his inuenitur ista pro curua BMA aequatio $\int dx \int \frac{qudx}{f} = \int dy \int qdx$, seu $dx \int qudx = fdy \int qdx$, et posito dx constante, erit $qudx^2 = fddy \int qdx + fqdxdy$, in qua si loco y ponatur $b - u$ prodit $qudx^2 + fdduf qdx + fqdxdu = 0$. Quae est aequatio pro curua AMB, ex qua longitudo f determinatur ex data funis longitudine Ba; quae si ponatur a, et ex aequatione quaeratur locus vbi $u = 0$; dabit valor ipsius x per f inuentus longitudinem a, vnde f per a inuenietur. Sine sumto M in A erit $\int qudx = Da.Aa.dx$ et $\int qdx = Da.dx$. Quibus positis erit in puncto A, $f = \frac{Aa.dx}{dy}$ = tangenti seu subtangenti curuae in A.

§. 36. Progredior nunc ad problema, quod mihi *Cl. Dan. Bernoulli* nuperrime proposuit, in quo oscillationes laminae elasticae muro verticali infixae et in plano horizontali oscillantis requirit. Sit igitur Ba virga seu lamina elastica in situ horizontali muro in B infixa, atque eiusdem vbique crassitiei. Induat ea inter oscillandum figuram BMA, sitque longitudo penduli simplicis isochroni $= f$. Debebit ergo esse vis, quae quouis eius elementum M, quod est $= dx$, posito $AP = x$, secundum Mm vrget $= \frac{Mm.dx}{f}$. Quare si in quouis eius punc- Figura. 10.

cto M potentia $\frac{Mm.dx}{f}$ ſecundum directionem ipſi Mm contrariam MP concipiatur applicata, lamina elaſtica BMA in hoc ſitu erit in aequilibrio. Ponatur PM$=y$, A$a=b$, et M$m=b-y=u$; ſitque radius oſculi in M$=r$, et vis elaſtica abſoluta $=$A ſeu conſtans; erit ergo V$=$A. Deinde quia grauitas laminae non in conſiderationem venit, erit Q$=0$, et P$=\frac{\int u\,dx}{f}$. Ex quibus pro curua BMA haec obtinetur aequatio $\frac{A}{r}=\int dx\int\frac{u\,dx}{f}$. Poſito autem dx conſtante eſt $r=\frac{-dx}{d\,dy}=\frac{dx^2}{ddu}$; quare erit A$ddu=dx^2\int dx\int\frac{u\,dx}{f}$ ſeu A$\int d^4u=u\,dx^4$, quae eſt aequatio pro curua AMB.

§. 37. Ex hac autem aequatione differentiali quarti ordinis valde eſt difficile quicquam ad oſcillationes laminarum elaſticarum cognoſcendas deriuare. Quia enim haec aequatio quadruplicem integrationem requirit, ſi in vnaquaque conſtans adiiciatur, tam innumerabiles prodibunt eae curuae, ad quas ea pertinet, vt quae illarum noſtro exemplo conueniat, non ſine ſumma circumſpectione definiri queat. Obſeruauit quidem *Cl. Dan. Bernoulli* in hac aequatione contineri iſtas B$d^2u=u\,dx^2$ et B$du=u\,dx$, quarum vero neutra hic locum habere poteſt. Quod quidem ad quatuor illas conſtantes in totidem integrationibus addendas attinet, earum tres ex his conditionibus determinantur, quod poſito $x=0$, fieri debeat $u=b$; ſimulque et $\int u\,dx=0$ et $\int dx\int u\,dx=0$; quarta vero conſtans tamen manet indeterminata. Eam autem ex hac conditione definiri debere tandem intellexi, quod in puncto B, vbi ſit $u=0$, tangens in ipſam rectam

rectam Ba debeat incidere, id quod natura elateris, qui non nisi a potentia infinita ad angulum finitum inflecti potest, postulat.

§. 38. Quo igitur melius curuae B M A natura cognoscatur, sumo aequationem $A f ddu = dx^2 f dx f u dx$ eamque in seriem transmuto tribus primo memoratis conditionibus satisfaciendo. Methodo autem ad hoc faciendum satis consueta adeptus sum hanc aequationem $u = b - Cx + \frac{bx^4}{1.2.3.4 Af} - \frac{Cx^5}{1.2.3.4.5 Af} + \frac{bx^8}{1.2\ldots8 A^2 f^2} - \frac{Cx^9}{1.2.3\ldots9 A^2 f^2} +$ etc. quae series ex duabus satis regularibus est conflata. In ea vero inest noua indeterminata constans C, quae ex quarta conditione debet definiri. Pono ergo B$a = a$, positoque $x = a$, euanescere debet u. Quocirca prodibit ista aequatio $o = b - Ca + \frac{ba^4}{1.2.3.4 Af} - \frac{Ca^5}{1.2.3.4.5 Af} +$ etc. ex qua prodit $C = \frac{b + \frac{ba^4}{1.2.3.4 Af} + \frac{ba^8}{1.2.3\ldots8 A^2 f^2}}{a + \frac{a^5}{1.2.3.4.5 Af} + \frac{a^9}{1.2.3\ldots9 A^2 f^2}}$

Cum vero etiam $\frac{du}{dx}$ debeat esse $= o$ si $x = a$; erit $o = -C + \frac{ba^3}{1.2.3 Af} - \frac{Ca^4}{1.2.3.4 A^2 f^2} +$ etc. seu $C = \frac{\frac{ba^3}{1.2.3 Af} + \frac{ba^7}{1.2\ldots7 A^2 f^2} - \frac{ba^{11}}{1.2\ldots11 A^3 f^3}}{1 + \frac{a^4}{1.2.3.4 Af} + \frac{a^8}{1.2\ldots8 A^2 f^2} +}$ etc.

§. 39. His duabus inuentis aequationibus coniungendis et loco numeralium coefficientium litteris α, β, γ, etc. ponendis prodibit ista aequatio: $o = 1 + \frac{\alpha a^4}{Af} + \frac{\beta a^8}{A^2 f^2} + \frac{\gamma a^{12}}{A^3 f^3} +$ etc. in qua C non amplius inest. Ex hac aequatione pro f valor huiusmodi erit formae $\frac{N a^4}{A}$ denotante N numerum quempiam constantem, qui est circi-

citer $= \frac{2}{25}$, ita vt longitudo penduli simplicis isochroni sit vt $\frac{\alpha a^4}{\Lambda}$. *Pro variis ergo laminis elasticis eiusdem vbique crassitiei oscillantibus erunt longitudines pendulorum simplicium isochronorum in ratione composita ex directa quadruplicata longitudinum laminarum, et reciproca simplici elasticitatum absolutarum. Tempora vero singularum oscillationum erunt directe vt quadrata longitudinum laminarum et inuerse vt radices quadratae ex elasticitatibus absolutis.* Tempora igitur oscillationum laminarum aequali elasticitate praeditarum sunt in duplicata ratione longitudinum laminarum.

§. 40. Sin autem duae laminae ex materiis diuersae elasticitatis aequales fabricentur, eaeque parieti firmo infigantur, tum tempora oscillationum illarum erunt in ratione reciproca subduplicata elasticitatum, quia longitudines ponuntur aequales. Quamobrem numeri oscillationum, quas istae laminae dato tempore puta vno minuto edunt, erunt directe vt radices quadratae ex elasticitatibus. Hoc igitur modo diuersarum materiarum elasticitates explorari poterunt, quod tum in Physica, tum in vita communi non parum vtilitatis habebit. Hinc enim inuestigari poterit, quanto alia chalybis species sit alia magis elastica; atque etiam elasticitates diuersorum metallorum inter se comparari poterunt. Ad hoc accedit, quod haec methodus admodum sit facilis, et sola oscillationum numeratione perficiatur. Ne autem oscillationes nimis fiant celeres, oportet vt laminae satis sint magnae seu longae; de quo quidem obseruasse sufficere posse, si earum longitudo sit duorum circiter pedum.

§. 41.

§. 41. In hoc negotio vel lamina grauitatis expers ponitur, vel ita eſt parieti firmo infigenda, vt grauitas oſcillatorium motum nihil afficiat, id quod obtinetur, ſi horizontaliter muro infigatur, atque ſatis ſit lata, ne a grauitate deorſum incuruari queat. Nunc vero quoque laminam elaſticam grauem contemplabimur, eamque pauimento firmo verticaliter in B infixam ponemus, ita vt ea ex B dependens oſcillationes perficiat. Sit ergo BMA curua, quam haec lamina inter oſcillandum formatur, in qua vt ante pono $Aa=b$, $AP=am=AM=x$, $PM=y$, $Mm=u$, radium oſculi in $M=r$ atque vim elaſticam in $M=\frac{A}{r}$. Sit f longitudo penduli ſimplicis iſochroni, erit vis, qua quoduis elementum dx per Mm vrgeri debet $=\frac{udx}{f}$, quae ergo vis ſi in directione contraria MP applicata concipiatur, tota lamina in ſitu BMA erit in aequilibrio. His ergo cum generali propoſitione comparatis eſt $P=\int\frac{udx}{f}$, $Q=-\alpha\int dx=-\alpha x$, et E et $F=0$. Prodibit ergo pro curua BMA iſta aequatio $\frac{A}{r}=\int dx\int\frac{udx}{f}-\alpha\int x\,dy$ ſeu $\frac{A\,d\,du}{dx^2}=\int dx\int\frac{udx}{f}+\alpha\int x\,du$, quae abit in $fA\,d^4u=u\,dx^4+\alpha f\,dx^3\,du+\alpha f x\,dx^2\,ddu$, quam autem vlterius non perſequor.

§. 42. His de oſcillationibus ſimium perfecte flexibilium et laminarum elaſticarum vnico puncto fixarum expoſitis ad oſcillationes eorundem corporum inueſtigandas progredior, ſi in duobus punctis fuerint fixae, quorſum pertinent motus vibratorii chordarum tenſarum tam perfecte flexibilium quam elaſticarum. Ac primo quidem ſit BPA chorda perfecte flexibilis in B fixa, in A vero Figura 11.

vero tenſa pondere F ope fili AC. In A vero chorda vel per foraminulum tranſit vel ponticulo ſuperiacet, ne vibrationes vltra A verſus B propagentur. Huius ergo loco pondus E concipio, quo chordae punctum A ſemper in hoc loco retineatur. Sit itaque BMA figura, quam chorda inter oſcillandum induit, voceturque $AP = x$, cui et AM ob interuallum PM valde paruum aequatur, et $PM = y$, ſitque pondusculum ſeu maſſa elementi chordae in $M = g\,dx$, pono enim chordam aequabilis craſſitiei.

§. 43. Sit porro longitudo penduli ſimplicis iſochroni f, erit vis, qua quoduis elementum $g\,dx$ ex M verſus P per MP vrgetur $= \frac{g\,y\,dx}{f}$. Huic ergo vi, ſi aequalis in directione contraria applicata concipiatur, chorda BMA erit in aequilibrio. Chordam praeterea ipſam grauitatis expertem pono. Hoc ergo caſu ad propoſitionem generalem accommodato erit $P = -\int \frac{g\,y\,dx}{f} = -\frac{g}{f} \int y\,dx$, $E = E$, atque $F = -F$ ac $Q = 0$. Ex quibus pro curua AMB haec prouenit aequatio $Ex = Fy - \frac{g}{f} \int dx \int y\,dx = 0$, quae bis differentiata dat $F\int dd y + g\,y\,dx^2 = 0$ poſito dx conſtante. Huius aequationis in dy ductae integralis eſt $F\int dy^2 + g\,y^2\,dx^2 = g\,b^2\,dx^2$ poſita b maxima chordae a recta AB declinatione ef, vbi eſt $dy = 0$. Hanc ob rem erit $dx = \frac{dy\sqrt{Ff}}{\sqrt{g}\,(b^2 - y^2)}$, atque $x = \frac{\sqrt{Ff}}{b\sqrt{g}} \times$ in arcum circuli cuius ſinus eſt y exiſtente ſinu toto $= b$.

§. 44. Sit tota chordae longitudo $AB = a$, quae ex aequatione inuenta prodire debet, ſi y altera vice euaneſcere ponatur. Hoc vero euenit, ſi arcus ille circuli aequa-

aequalis fit ſemiperipheriae, quo facto erit $x = a$. Sit ergo $1 : \pi$ ratio diametri ad peripheriam erit πb ſemiperipheria circuli radii b. Quamobrem erit $a = \frac{\pi\sqrt{Ff}}{\sqrt{g}}$ ſeu $\sqrt{f} = \frac{a\sqrt{g}}{\pi\sqrt{F}}$ atque $f = \frac{ga^2}{\pi^2 F}$, quae eſt longitudo penduli ſimplicis iſochroni, in qua F pondus chordam tendens, a longitudinem chordae, et ga ſeu $fgdx$ pondus ſeu maſſam chordae ſignificat. Sit autem pondus chordae $= p$ erit $f = \frac{ap}{\pi^2 F}$. Singularum igitur vibrationum tempora erunt in ratione compoſita ſubduplicata ex directis longitudinum et ponderum chordarum et ex inuerſa ponderum chordas tendentium.

§. 45. Quo autem appareat, quot oſcillationes chorda dato tempore ſcilicet minuto ſecundo edat; conſiderari debet longitudo penduli ſimplicis ſingulis minutis ſecundis oſcillantis quae eſt 3,166 ped.Rh. Erit ergo vnum minutum ſecundum ad tempus vnius chordae vibrationis vt $\sqrt{3,166} : \frac{\sqrt{ap}}{\pi\sqrt{F}}$, ex quo numerus vibrationum minuto ſecundo editarum eſt $\frac{\pi\sqrt{3,166F}}{\sqrt{ap}}$, ſeu $\frac{\pi\sqrt{3166F}}{\sqrt{ap}}$, ſi a in partibus milleſimis pedis Rhenani exprimatur. Poſito vero loco π eius valore, erit iſte vibrationum numerus $= \frac{\sqrt{31250F}}{\sqrt{ap}} = \frac{125\sqrt{2F}}{\sqrt{ap}}$, vbi 15625 ſcrup. denotant altitudinem, quam graue deſcendendo minuto ſecundo abſoluit.

§. 46. Haec eſt ea ipſa regula pro inueniendo vibrationum numero tempore vnius minuti ſecundi edito a data chorda tenſa, quam primum *Cl. Taylor* in Methodo Incrementorum, et *Cl. Ioh. Bernoulli* in Comment. noſtris dederunt, ex longe diuerſis principiis petitam. Habet autem haec regula magnam vtilitatem in Muſica et acuſtica, ad ſonos, quos quaeuis chorda edit, de-

terminandos, ſint enim ſoni inter ſe vti vibrationum dato tempore editarum numeri. Ex hac porro regula, ſi habeatur menſura fixa ſcilicet pedis Rhenani, qui vbi vis locorum ope pendulorum inueniri poteſt, ſoni fixi determinari poterunt, dum chorda ita adaptatur, vt datum minuto ſecundo vibrationum numerum edat. Ope huius regulae inueni in inſtrumentis muſicis, quae ad tonum choralem attemperata ſunt, chordam infimam littera C notatum minuto ſecundo 118 edere vibrationes; ſummam vero, quae $\overline{\overline{c}}$ ſignari ſolet, eodem tempore vibrationes 1888 abſoluere.

§. 47. Ponuntur quidem hic chordae perfecte flexibiles, quod autem in chordas aeneas et chalybeas minus competere videtur. At cum huiusmodi chordae ſint admodum flexibiles, quin etiam laxae ſponte ſeſe inflectant, merito dubitari licet, num elaſticitas in computum ſit ducenda, ſi quidem chordae fuerint admodum tenues, vti in inſtrumentis adhiberi ſolent. Sin autem chordae admodum craſſae fuerint, vt etiam non tenſae ſint in directum ſitae, atque ad eas tantum inflectendas vis requiratur, tum vtique vis elaſtica in calculum duci debebit. Huc ſcilicet pertinent vibrationes bacillorum metallicorum vel etiam ligneorum ſuis extremitatibus ponticulis impoſitorum, qui impulſi, etiamſi non ſint tenſi, ſola vi elaſticitatis ſonos edunt. Si igitur in his elaſticitas

Figura 12. fuerit $= \frac{A}{r}$, vt ſupra poſuimus, atque bacillus AB inter oſcillandum induat curuam AMB, pro qua ponatur AP $= x$, PM $= y$, erit $\frac{A}{r} = -\frac{g}{f}\int dx \int y\,dx$ ſeu $A\int dd y + g dx^2 \int dx \int y\,dx = 0$, quae aequatio fere conuenit cum ea, quam pro lamina elaſtica oſcillante inuenimus, ſed modo alio huic caſui eſt accommodanda. DE

DE SVMMIS SERIERVM RECIPROCARVM.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

TAntopere iam pertractatae et inueſtigatae ſunt ſeries reciprocae poteſtatum numerorum naturalium, vt vix probabile videatur de iis noui quicquam inueniri poſſe. Quicunque enim de ſummis ſerierum meditati ſunt, ii fere omnes quoque in ſummas huiusmodi ſerierum inquiſiuerunt, neque tamen vlla methodo eas idoneo modo exprimere potuerunt. Ego etiam iam ſaepius, cum varias ſummandi methodos tradidiſſem, has ſeries diligenter ſum perſecutus, neque tamen quicquam aliud ſum aſſecutus, niſi vt earum ſummam vel proxime veram definuerim vel ad quadraturas curuarum maxime tranſcendentium reduxerim; quorum illud in diſſertatione proxime praelecta, hoc vero in praecedentibus praeſtiti. Loquor hic autem de ſeriebus fractionum, quarum numeratores ſunt 1, denominatores vero vel quadrata, vel cubi, vel aliae dignitates numerorum naturalium; cuius modi ſunt $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$ etc., item $1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+$ etc. atque ſimiles ſuperiorum poteſtatum, quarum termini generales continentur in hac forma $\frac{1}{x^n}$. Tabula VII.

§. 2. Deductus ſum autem nuper omnino inopinato ad elegantem ſummae huius ſeriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$etc. expreſſionem, quae a circuli quadratura pendet, ita, vt ſi huius ſeriei vera ſumma haberetur, inde ſimul circuli quadratura ſequeretur. Inueni enim ſummae huius ſeriei ſextuplum aequale eſſe quadrato peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1; ſeu poſita iſtius ſeriei ſumma $=s$, tenebit $\sqrt{6}s$ ad 1 rationem peripheriae ad diametrum. Huius autem ſeriei ſummam nuper oſtendi proxime eſſe 1, 644934066848226436 4, ex cuius numeri ſextuplo, ſi extrahatur radix quadrata, reipſa prodit numerus 3, 14159265358979323 8 exprimens circuli peripheriam, cuius diameter eſt 1. Iisdam porro veſtigiis, quibus hanc ſummam ſum conſecutus, incedens huius ſeriei $1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\frac{1}{625}+$etc. ſummam quoque a quadratura circuli pendere deprehendi. Summa nempe eius per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1. Atque ſimili ratione etiam ſequentium ſerierum, in quibus exponentes dignitatum ſunt numeri pares, ſummas determinare potui.

§. 3. Quo igitur, quemadmodum haec ſum adeptus, commodiſſime oſtendam, totam rem, quo ipſe vſus ſum, ordine exponam. In circulo AMBNA centro C radio AC vel $BC=1$ deſcripto contemplatus ſum arcum quemcunque AM, cuius ſinus eſt MP, coſinus vero CP. Poſito nunc arcu $AM=s$, ſinu $PM=y$, et coſinu $CP=x$, per methodum iam ſatis cognitam tam ſinus y quam coſinus x ex dato arcu s per ſeries poſ-

Figura 1.

ſunt

sunt definiri, est enim, vti passim videre licet $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. atque $x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} +$ etc. Ex harum scilicet aequationum consideratione ad summas supra memoratarum serierum reciprocarum perueni; quarum aequationum quidem vtraque ad eundem fere scopum dirigitur, et hanc ob rem sufficiet alteram tantum eo, quem sum expositurus, modo tractasse.

§. 4. Aequatio ergo prior $y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. exprimit relationem inter arcum et sinum. Quare ex ea tam ex dato arcu eius sinus, quam ex dato sinu eius arcus determinari poterit. Considero autem sinum y tanquam datum, et inuestigo, quemadmodum arcum s ex y erui oporteat. Hic vero ante omnia animaduertendum est, eidem sinui y innumerabiles arcus respondere, quos ergo innumerabiles arcus aequatio proposita praebere debebit. Si quidem in ista aequatione s tanquam incognita spectetur, ea infinitas habet dimensiones, ideoque mirum non est, si ista aequatio innumeros contineat factores simplices, quorum quisque nihilo aequalis positus, idoneum pro s valorem dare debet.

§. 5. Quemadmodum autem, si omnes factores huius aequationis cogniti essent, omnes quoque radices illius seu valores ipsius s innotescerent, ita vicissim si omnes valores ipsius s assignari poterunt, tum quoque ipsi factores omnes habebuntur. Quo autem eo melius tam de radicibus quam de factoribus iudicare queam, trans-

muto aequationem propositam in hanc formam: $0 = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. Si nunc omnes radices huius aequationis seu omnes arcus, quorum idem est sinus y, fuerint A, B, C, D, E etc. tum factores quoque erunt omnes istae quantitates, $1 - \frac{s}{A}$, $1 - \frac{s}{B}$, $1 - \frac{s}{C}$, $1 - \frac{s}{D}$ etc. Quamobrem erit $1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} +$ etc. $= (1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})$ etc.

§. 6. Ex natura autem et resolutione aequationum constat, esse coëfficientem termini, in quo inest s, seu $\frac{1}{y}$ aequalem summae omnium coëfficientium ipsius s in factoribus seu $\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} +$ etc. Deinde est coëfficiens ipsius s^2, qui est $= 0$, ob hunc terminum in aequatione deficientem, aequalis aggregato factorum ex binis terminis seriei, $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Porro erit $- \frac{1}{1.2.3.y}$ aequale aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$ etc. Similique modo erit $0 =$ aggregato factorum ex quaternis terminis eiusdem seriei, et $+ \frac{1}{1.2.3.4.5.y} =$ aggregato factorum ex quinis terminis istius seriei, et ita porro.

§. 7. Posito autem minimo arcu $AM = A$, cuius sinus est $PM = y$, et semiperipheria circuli $= p$, erunt $A, p - A, 2p + A, 3p - A, 4p + A, 5p - A, 6p + A$ etc. item $-p - A, -2p + A, -3p - A, -4p + A, -5p - A$, etc. omnes arcus, quorum sinus est idem y. Quam igitur ante assumsimus seriem $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}$, etc. ea transmutatur in hanc $\frac{1}{A}, \frac{1}{p-A}, \frac{1}{-p-A}, \frac{1}{2p+A}, \frac{1}{-2p+A}, \frac{1}{3p-A}, \frac{1}{-3p-A}, \frac{1}{4p+A}, \frac{1}{-4p+A}$ etc. Horum ergo omnium termi-

terminorum ſumma eſt $= \frac{1}{\gamma}$; ſumma autem factorum ex binis terminis huius ſeriei eſt aequalis 0; ſumma factorum ex ternis $= \frac{-1}{1.2.3.\gamma}$, ſumma factorum ex quaternis $= 0$; ſumma factorum ex quinis $= \frac{+1}{1.2.3.4.5.\gamma}$; ſumma factorum ex ſenis $= 0$. Atque ita porro.

§. 8. Si autem habeatur ſeries quaecunque $a + b + c + d + e + f +$ etc. cuius ſumma ſit α, ſumma factorum ex binis terminis $= \mathfrak{B}$; ſumma factorum ex ternis $= \gamma$; ſumma factorum ex quaternis $= \delta$, etc. erit ſumma quadratorum ſingulorum terminorum, hoc eſt $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 +$ etc. $= \alpha^2 - 2\mathfrak{B}$; ſumma vero cuborum $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ etc. $= \alpha^3 - 3\alpha\mathfrak{B} + 3\gamma$; ſumma biquadratorum $= \alpha^4 - 4\alpha^2\mathfrak{B} + 4\alpha\gamma + 2\mathfrak{B}^2 - 4\delta$. Quo autem clarius appareat, quomodo hae formulae progrediantur, ponamus ipſorum terminorum $a, b, c, d,$ etc. ſummam eſſe $= P$, ſummam quadratorum $= Q$, ſummam cuborum $= R$, ſummam biquadratorum $= S$, ſummam poteſtatum quintarum $= T$, ſummam ſextarum $= V$ etc. His poſitis erit $P = \alpha$; $Q = P\alpha - 2\mathfrak{B}$; $R = Q\alpha - P\mathfrak{B} + 3\gamma$; $S = R\alpha - Q\mathfrak{B} + P\gamma + 4\delta$; $T = S\alpha - R\mathfrak{B} + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon$; etc.

§. 9. Cum igitur in noſtro caſu ſeriei $\frac{1}{A}, \frac{1}{p-A}, \frac{1}{-p-A}, \frac{1}{2p+A}, \frac{1}{-2p+A}, \frac{1}{3p-A}, \frac{1}{-3p-A}$ etc. ſumma omnium terminorum ſeu α ſit $= \frac{1}{\gamma}$; ſumma factorum ex binis ſeu $\mathfrak{B} = 0$, atque vlterius $\gamma = \frac{-1}{1.2.3.\gamma}$; $\delta = 0$; $\varepsilon = \frac{+1}{1.2.3.4.5.\gamma}$, $\zeta = 0$; etc. erit ſumma ipſorum illorum terminorum $P = \frac{1}{\gamma}$; ſumma quadratorum illorum terminorum $Q = \frac{P}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^2}$;

ſumma

ſumma cuborum illorum terminorum $R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2.y}$; ſumma biquadratorum $S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1.2.3.y}$. Atque porro $T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1.2.3.y} + \frac{1}{1.2.3.4.y}$; $V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1.2.3.y} + \frac{P}{1.2.3.4.5.y}$; $W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1.2.3.y} + \frac{Q}{1.2.3.4.5y} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.y}$. Ex qua lege facile reliquarum altiorum poteſtatum ſummae determinantur.

§. 10. Ponamus nunc ſinum $PM = y$ aequalem radio, vt ſit $y = 1$, erit minimus arcus A cuius ſinus eſt 1 quarta peripheriae pars, $= \frac{1}{2}p$, ſeu denotante q quartam peripheriae partem erit $A = q$ et $p = 2q$. Superior ergo ſeries abibit in iſtam $\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, \frac{-1}{3q}, -\frac{1}{3q}, \frac{+1}{5q}, +\frac{1}{5q}, -\frac{1}{7q}, -\frac{1}{7q}, +\frac{1}{9q}, +\frac{1}{9q}$, etc. binis terminis exiſtentibus aequalibus. Horum ergo terminorum ſumma, quae eſt $\frac{+2}{q}$ $(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc.) aequalis eſt ipſi $P = 1$. Hinc igitur oritur $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. $= \frac{q}{2} = \frac{p}{4}$. Huius ergo ſeriei quadruplum aequatur ſemiperipheriae circuli, cuius radius eſt 1, ſeu toti peripheriae circuli, cuius diameter eſt 1. Atque haec eſt ipſa ſeries a *Leibnitio* iam pridem prolata, qua circuli quadraturam definiuit. Ex quo magnum huius methodi, ſi cui forte ea non ſatis certa videatur, firmamentum elucet; ita vt de reliquis, quae ex hac methodo derivabantur, omnino non liceat dubitari.

§. 11. Sumamus nunc inuentorum terminorum pro caſu quo $y = 1$, quadrata, prodibitque haec ſeries $+\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} +$ etc. cuius ſumma eſt $\frac{1}{q^2}(\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc.), quae ergo aequalis eſſe debet ipſi $Q = P = 1$. Ex quo ſequitur huius ſeriei $1 + \frac{1}{9}$

$+$

$+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{25^4}+\frac{1}{49^4}+$ etc. ſummam eſſe $=\frac{q^2}{2}=\frac{p^2}{8}$; denotante p totam circuli peripheriam, cuius diameter eſt $=1$. Summa autem huius ſeriei $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+$ etc. pendet a ſumma ſeriei $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+$etc. quia haec quarta ſui parte minuta illam dat. Eſt ergo ſumma huius ſeriei aequalis ſummae illius cum ſui triente. Quamobrem erit $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$etc. $=\frac{p^2}{6}$, ideoque huius ſeriei ſumma per 6 multiplicata aequalis eſt quadrato peripheriae circuli cuius diameter eſt 1; quae eſt ipſa propoſitio cuius initio mentionem feci.

§. 12. Cum igitur caſu quo $y=1$, ſit $P=1$ et $Q=1$, erunt reliquarum litterarum R, S, T, V etc. vt ſequitur: $R=\frac{1}{2}$; $S=\frac{1}{3}$; $T=\frac{5}{24}$; $V=\frac{2}{15}$; $W=\frac{61}{720}$; $X=\frac{17}{315}$ etc. Cum autem ſumma cuborum ipſi $R=\frac{1}{8}$ ſit aequalis, erit $\frac{2}{q^3}(1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-$etc.$)=\frac{1}{2}$. Quare erit $1-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{9^3}-$etc. $=\frac{q^3}{4}=\frac{p^3}{32}$. Huius ideo ſeriei ſumma per 32 multiplicata dat cubum peripheriae circuli cuius diameter eſt 1. Simili modo ſumma biquadratorum, quae eſt $\frac{2}{p^4}(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+$ etc.) aequalis eſſe debet $\frac{1}{3}$, ideoque erit $1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+$etc. $=\frac{q^4}{8}=\frac{p^4}{96}$. Eſt vero haec ſeries per $\frac{16}{15}$ multiplicata aequalis huic $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+$etc. quare iſta ſeries aequalis eſt $\frac{p^4}{90}$; ſeu ſeriei $1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+$etc. ſumma per 90 multiplicata dat biquadratum peripheriae circuli cuius diameter eſt 1.

§. 13. Simili modo inuenientur ſummae ſuperiorum poteſtatum; prodibit autem vt ſequitur $1-\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}-\frac{1}{7^5}+\frac{1}{9^6}-$etc. $=\frac{5q^5}{48}=\frac{5p^5}{1536}$; atque $1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+$etc

$+$ etc. $= \frac{q^6}{15} = \frac{p^6}{960}$. Inuenta vero huius seriei summa, cognoscetur simul summa huius seriei $1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} +$ etc. quae erit $= \frac{p^6}{945}$. Porro pro potestatibus septimis erit $1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} -$ etc. $= \frac{61q^7}{1440} = \frac{61p^7}{184320}$ ac pro octauis $1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} +$ etc. $= \frac{17q^8}{630} = \frac{17p^8}{161280}$; vnde deducitur $1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} +$ etc. $= \frac{p^8}{9450}$. Obseruandum autem est de his seriebus in potentiis exponentium imparium signa terminorum alternari, pro potestatibus paribus vero esse aequalia; hocque in causa est, quod huius generalis seriei $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc. iis tantum casibus summa possit exhiberi, quibus n est numerus par. Praeterea quoque notandum est, si seriei $1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{5}{24}, \frac{2}{15}, \frac{61}{720}, \frac{17}{315}$ etc. quos valores pro litteris P, Q, R, S etc. inuenimus, terminus generalis posset assignari, tum eo ipso quadraturam circuli exhibitum iri.

§. 14. In his posuimus sinum PM aequalem radio, videamus ergo quales series prodeant, si ipsi y alii valores tribuantur. Sit igitur $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, cui sinui minimus arcus respondens est $\frac{1}{4}p$. Posito ergo $A = \frac{1}{4}p$ erit series terminorum simplicium seu primae potestatis ista $\frac{4}{p} + \frac{4}{3p} - \frac{4}{5p} - \frac{4}{7p} + \frac{4}{9p} + \frac{4}{11p} -$ etc. cuius seriei summa P aequalis est $\frac{1}{y} = \sqrt{2}$. Habebitur ergo $\frac{p}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. quae series tantum ratione signorum a *Leibnitiana* differt, et a *Newtono* iam dudum est prolata. Summa vero quadratorum illorum terminorum nempe $\frac{16}{p^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} +$ etc.) aequalis est ipsi $Q = 2$. Erit ergo

ergo $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} = \frac{pp}{8}$, vti ante eſt inuentum.

§. 3. Si fiat $y = \sqrt{\frac{1}{2}}$ erit minimus arcus huic ſinui reſpondens $60°$, ideoque $A = \frac{1}{3}p$. Hoc ergo caſu ſequens prodibit ſeries terminorum $\frac{3}{p} + \frac{3}{2p} - \frac{3}{4p} - \frac{3}{5p} + \frac{3}{7p} + \frac{3}{8p}$ etc. quorum terminorum ſumma aequalis eſt ipſi $\frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{2}}$. Habebitur ergo $\frac{2p}{3\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} +$ etc. Summa vero quadratorum illorum terminorum eſt $= \frac{1}{y^2} = \frac{4}{3}$; vnde ſequitur fore $\frac{4pp}{27} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64}$ etc. in qua ſerie deſunt termini ternario conſtantes. Pendet autem haec ſeries quoque ab iſta $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. cuius ſumma erat inuenta $= \frac{pp}{6}$; nam ſi haec ſeries ſui parte nona minuatur prodit ipſa ſuperior ſeries, cuius ideo ſumma debet eſſe $= \frac{pp}{6}(1 - \frac{1}{9}) = \frac{4pp}{27}$. Simili modo ſi alii aſſumantur ſinus, aliae prodibunt ſeries, tam ſimplicium, quam terminorum quadratorum altiorumque poteſtatum, quarum ſummae quadraturam circuli inuoluent.

§. 16. At ſi ponatur $y = 0$, huiusmodi ſeries non amplius aſſignari poterunt, propter y in denominatorem poſitum, ſeu aequationem initialem per y diuiſam. Alio autem modo ſeries inde deduci poterunt, quae cum ſint ipſae ſeries $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ etc. ſi n eſt numerus par: quemadmodum harum ſerierum ſummae ſint inueniendae, ſeorſum ex hoc caſu quo $y = 0$ deducam. Poſito vero $y = 0$ ipſa aequatio fundamentalis abit in hanc $0 = s - \frac{s^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{s^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{s^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} +$ etc. cuius aequationis radices dant omnes arcus, quorum ſinus eſt $= 0$.

Eſt autem vna minimaque radix $s = 0$, quare aequat $\gg$ per s diuiſa exhibebit reliquos arcus omnes, quorum ſinus eſt $= 0$, qui arcus proinde erunt radices huius aequationis $0 = 1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. Ipſa vero arcus quorum ſinus eſt $= 0$ ſunt $p, -p, +2p, -2p, 3p, -3p$ etc. quorum binorum alter alterius eſt negatiuus, id quod quoque ipſa aequatio propter dimenſiones ipſius s tantum pares indicat. Quare diuiſores illius aequationis erunt $1 - \frac{s}{p}$, $1 + \frac{s}{p}$, $1 - \frac{s}{2p}$, $1 + \frac{s}{2p}$, etc. atque coniungendis binis horum diuiſorum erit $1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} +$ etc. $= (1 - \frac{s^2}{p^2})(1 - \frac{s^2}{4p^2})(1 - \frac{s^2}{9p^2})(1 - \frac{s^2}{16p^2})$ etc.

§. 17. Manifeſtum iam eſt ex natura aequationum, fore coefficientem ipſius ss ſeu $\frac{1}{1.2.3}$ aequalem $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. Summa vero factorum ex binis terminis huius ſeriei erit $= \frac{1}{1.2.3.4.5}$; ſummaque factorum ex ternis $= \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$ etc. Hanc ob rem erit iuxta §. 8. $\alpha = \frac{1}{1.2.3}$; $\mathfrak{B} = \frac{1}{1.2.3.4.5}$; $\gamma = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}$; etc. atque poſita quoque ſumma terminorum $\frac{1}{p^2} + \frac{1}{4p^2} + \frac{1}{9p^2} + \frac{1}{16p^2} +$ etc. $= P$, et ſumma quadratorum eorundem terminorum $= Q$; ſumma cuborum $= R$; ſumma biquadratorum $= S$; etc. erit per §. 8. $P = \alpha = \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{6}$; $Q = P\alpha - 2\mathfrak{B} = \frac{1}{90}$; $R = Q\alpha - P\mathfrak{B} + 3\gamma = \frac{1}{945}$; $S = R\alpha - Q\mathfrak{B} + P\gamma - 4\delta = \frac{1}{9450}$; $T = S\alpha - R\mathfrak{B} + Q\gamma - P\delta + 5\varepsilon = \frac{1}{93555}$; $V = T\alpha - S\mathfrak{B} + R\gamma - Q\delta + P\varepsilon - 6\zeta = \frac{691}{638512875}$ etc.

§. 18.

§. 18. Ex his ergo deriuantur ſummae ſequentes:

$$1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{5^2}\text{ etc.} = \tfrac{p^2}{6} = P$$
$$1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\tfrac{1}{5^4}\text{ etc.} = \tfrac{p^4}{90} = Q$$
$$1+\tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{4^6}+\tfrac{1}{5^6}\text{ etc.} = \tfrac{p^6}{945} = R$$
$$1+\tfrac{1}{2^8}+\tfrac{1}{3^8}+\tfrac{1}{4^8}+\tfrac{1}{5^8}\text{ etc.} = \tfrac{p^8}{9450} = S$$
$$1+\tfrac{1}{2^{10}}+\tfrac{1}{3^{10}}+\tfrac{1}{4^{10}}+\tfrac{1}{5^{10}}\text{ etc.} = \tfrac{p^{10}}{93555} = T$$
$$1+\tfrac{1}{2^{12}}+\tfrac{1}{3^{12}}+\tfrac{1}{4^{12}}+\tfrac{1}{5^{12}}\text{ etc.} = \tfrac{691p^{12}}{6825.93555} = V.$$

quae ſeries ex data lege attamen multo labore ad altiores poteſtates produci poſſunt. Diuidendis autem ſingulis ſeriebus per praecedentes orientur ſequentes aequationes: $p^2 = 6P = \frac{15Q}{P} = \frac{21R}{2Q} = \frac{10S}{R} = \frac{99T}{10S} = \frac{6825V}{691T}$ etc. quibus expreſſionibus ſingulis quadratum peripheriae cuius diameter eſt 1, aequatur.

§. 19. Cum autem harum ſerierum ſummae etiamſi vero proxime facile exhiberi poſſent, tamen non multum adiumenti afferre queant ad peripheriam circuli vero proxime exprimendam propter radicem quadratam, quae extrahi deberet; ex prioribus ſeriebus eliciemus expreſſiones, quae ipſi peripheriae p ſint aequales. Prodibit autem vt ſequitur:

$$p = 4 \quad \left(1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \text{etc.}\right)$$

$$p = 2 \quad \left(\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 4 \quad \left(\frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = 3 \quad \left(\frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \tfrac{16}{5} \quad \left(\frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \tfrac{25}{8} \quad \left(\frac{1 + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{6^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}\right)$$

$$p = \tfrac{101}{61} \quad \left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}\right)$$

DE LINEA CELERRIMI DESCENSVS IN MEDIO QVOCVNQVE RESISTENTE.

AVCTORE
Leonh. Euler.

§. 1.

QVae curuae ad certum quendam motum produ- Tabula VIII
cendum in vacuo non multo labore inueniuntur, eaedem in medio resistente non solum laborem multo maiorem; sed etiam plus sollertiae et cautionis requirunt. Saepenumero quoque euenit, vt multa problemata in hypothesi medii resistentis solutionem vel omnino respuant vel in particularibus tantum casibus admittant. Cuiusmodi est problema tautochronarum, de quo an in alia resistentiae hypothesi, praeter simplicem et duplicatam celeritatum rationem resolui queat, vehementer dubito.

§. 2. Pertinet huc quoque problema lineae brachystochronae seu celerrimi descensus, quod a *Cel. Ioh. Bernoulli* in hypothesi vacui Geometris propositum mox plures easque differentes nactum est solutiones, quas in Actis Lipsiensibus, Transact. Angl. Comment. Parisinis, pluribusque aliis libris videre licet. Idem autem problema in medii resistentis hypothesi ego primum in Actis Lipsi. A. 1726. soluendum proposui, cum ob eius non contemnendam elegantiam, tum ob singularem circumspectio-

ſpectionem, qua in eius ſolutione vti oportet, ne quis in errorem incidat.

§. 3. Poſtquam autem hoc problema propoſuiſſem *Celeb. Hermannus* id dignum iudicauit, cuius ſolutionem diſſertationi de motibus variatis Tom. II. Comment. inſereret. Sed copia rerum, quas in hac diſſertatione pertractauit viro ceterum perſpicaciſſimo non permiſiſſe videtur vt hoc problema, quod paucis tantum attigerat, ſatis perpenderet, et ſolutionem inuentam accurate examinaret. Ex quo factum eſt, vt curuae ab illo aſſignatae problemati non conueniant, nec brachyſtochronismi proprietatem poſſideant. Monui etiam hac de re beatae memoriae Virum per litteras, ipſique meam ſolutionem a ſua diſcrepantem transmiſi, vt in cauſam diſcriminis inquireret, ad quae mihi reſpondit, ſe vtique de ſua ſolutione dubitare coepiſſe, et quam primum negotia conceſſura eſſent, emendationem ſe perficere velle, quam etiam, niſi mors interueniſſet, pro eius eximia integritate iam certe haberemus.

§. 4. Quod igitur ipſe feciſſet, ſi vixiſſet, non arbitror quenquam aegre laturum, ſi idem ego fecero atque eius ſolutionem correxero. Hoc non ſolum non iniquum puto, ſed etiam ad id me obſtrictum credo, ne forte poſthac alii ſint acceſſuri, qui Viri eximii famam et exiſtimationem iſto lapſu imminuere ſuſtineant. Atque cum oſtendero, quantam circumſpectionem ad huiusmodi errores euitandos adhiberi oporteat, tum vnusquisque eo facilius Viro defuncto hoc erratum condonabit, tum etiam meum inſtitutum non reprehendet, quo genuina methodo problema a me propoſitum reſoluere ſtatui.

§. 5.

§. 5. Praecipuum, ad quod in solutione huius problematis attendere debemus, est lemma ex natura maximi et minimi petitum, per quod dispositio duorum elementorum contiguorum curuae quaesitae determinatur, quo corpus ea breuiori tempore absoluat descendendo, quam quaeuis alia elementa intra eosdem terminos posita. Huiusmodi propositio habetur a *Hugenio* demonstrata, eaque vsus est *Hermannus* in sua solutione: sed vti mox apparebit, plus ei tribuit, quam oportebat, atque ad restrictionem, quam ista propositio requirit, non satis attendebat. Quamobrem et hoc Lemma *Hugenianum* et aliud latius patens atque ad quosuis casus accommodatum in medium proferam.

§. 6. Oporteat igitur in recta FG definire punctum M ex quo ad datos terminos L et N ductae lineae LM, MN a descendente corpore tempore breuissimo percurrantur: sit autem celeritas corporis supra FG $= m$ et infra eam $= n$, quocunque assumto puncto M in FG. His igitur positis debebit $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n}$ esse minimum, quia hac quantitate tempus per LMN assignatur. Quod vt efficiatur, puncto M proximum m est accipiendum, et ductis Lm, mN tempora per LMN et LmN aequalia facienda. Hinc ergo habebitur $\frac{LM}{m} + \frac{MN}{n} = \frac{Lm}{m} + \frac{mN}{n}$, ex quo descriptis centris L et N arculis Mf et mg prodibit haec aequatio $\frac{mf}{m} = \frac{Mg}{n}$ seu ista analogia $mf : Mg = m : n$. Est vero mf ad Mg vt cosinus anguli LMF ad cosinum anguli GMN. Quocirca cosinus angulorum, quos haec duo elementa cum recta FG constituere debent, sunt celeritatibus, quibus illa elementa describuntur, propor- Figura 1.

tionales. Atque hoc est lemma *Hugenianum*, quo vsus *Hermannus* ad suam problematis solutionem peruenit.

§. 7. Quo autem perspiciatur, quam late pateat hoc lemma et quibus in casibus possit adhiberi, ad hoc est aduertendum, quod in eo ponitur, elementa omnia infra rectam FG sumta eadem celeritate *n* absolui. Quamobrem, nisi corpus in hisce omnibus elementis, puncto M vbicunque assumto, eandem habuerint celeritatem, hoc lemma perperam adhibetur, atque in erroneam solutionem inciditur. Euenit autem hoc in medio resistente, atque ita est factum, vt *Cel. Hermannus*, postquam hoc lemmate in inueniendis brachystochronis in vacuo feliciter esset vsus, pro mediis resistentibus eodem lemmate a recta via fuerit seductus.

§. 8. In vacuo tamen etiam res ita est instituenda, vt recta FG ad directionem potentiae sollicitantis vbique sit normalis. Tum enim id, quod requiritur, obtinetur, et corpus ex L ad quodque rectae FG punctum descendens idem semper acquirit celeritatis incrementum, ita vt singula elementa iutra FG sita aequali celeritate percurrantur. Curua igitur his in casibus, scilicet in vacuo, erit brachystochrona, si celeritas corporis in quouis elemento proportionalis fuerit sinui anguli, quem hoc elementum cum directione potentiae sollicitantis constituit. Quamobrem ope huius regulae inueniri poterit curua celerrimi descensus in vacuo, quaecunquae fuerit potentiae sollicitantis lex.

§. 9. Ex his iam satis perspicitur datam regulam inueniendae brachystochronae ad medium resistens accommodari

modari non poſſe. Namque celeritatis incrementa, quae corpus descendendo ex L ad quaeque rectae F G puncta acquirit, non ſunt inter ſe aequalia, etiamſi recta F G ad potentiae ſollicitantis directionem ſit normalis; ſed praeterea ab inclinatione elementorum percurſorum pendent, quemadmodum ex natura reſiſtentiae facile apparebit. Pro his igitur caſibus peculiare lemma ſtabiliri oportet, in quo celeritates per inferiora elementa vtcunque variabiles ponuntur, pro diuerſis locis in quibus punctum M in F G accipitur.

§. 10. Sumtis igitur vt ante punctis M et m proximis, et ductis elementis L M, M N ac L m, mN, ſit celeritas per elementa L M et L $m = q$, celeritas per M N $= q + dt$, at ea per elementum mN $= q + dt + dd\theta$. Incrementum ſcilicet celeritatis per L M acquiſitum ponitur dt, et id, quod per L m acquiritur, ponitur $dt + dd\theta$. Quo igitur tempus per L M N fiat minimum, oportet id aequale fieri tempori per L mN. Ex quo habebitur $\frac{LM}{q} + \frac{MN}{q+dt} = \frac{Lm}{q} + \frac{mN}{q+dt+dd\theta}$, atque ex hoc prodibit $\frac{mf}{q} = \frac{Mg}{q+dt} + \frac{mN.d\theta^2}{(q+dt)(q+dt+dd\theta)}$ ſeu $(q + 2qdt + dt^2 + qdd\theta + dtdd\theta)\, mf = (q^2 + qdt + qdd\theta)\, Mg + q.mN.dd\theta$. Eſt vero $mf = \frac{FM}{LM} Mm$ et $Mg = \frac{MG}{LM} Mm$. Quibus ſubſtitutis et neglectis negligendis orietur $q(\frac{MG}{LM} - \frac{FM}{LM}) = \frac{FM}{LM} dt - \frac{LM.dd\theta}{Mm}$. Quae, cum $dd\theta$ ſemper ita per Mm determinetur vt ſit huius formae Z.Mm, alias quantitates non inuoluet, niſi quae a puncto M pendebunt.

§. 11. Si aequalia ponantur elementa LF, NG, dicanturque dx, atque fiat $FM = dy$, $LM = ds$, erit $MG = dy + ddy$ et $MN = ds + dds$. Quibus ſubſtitutis ſuperior formula transibit in hanc $\frac{qdsddy - qdydds}{ds^2} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$, ſeu ob $dsdds = dyddy$ poſito dx conſtante, in hanc $\frac{qdx^2ddy}{ds^3} = \frac{dydt}{ds} - \frac{dsdd\theta}{Mm}$. Atque hoc eſt lemma, quo loco *Hugeniani* ad inueniendas brachyſtochronas in medio reſiſtente vti debemus.

§. 12. Sit nunc potentia ſollicitans quaecunque, eius vero directio, vt ante, normalis ad rectam FG. Ponatur ea dum corpus elementum LM vel Lm deſcribens vrget $= p$, poſita vi grauitatis $= 1$. Reſiſtat porro medium in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens ſit $2n$, atque haec reſiſtentia ita ſe habeat, vt aequalis ſit vi grauitatis 1, ſi corporis celeritas debita fuerit altitudini c. Iam ſit corporis in L celeritas tanta, quanta acquiritur lapſu grauis per altitudinem v. Quibus poſitis erit vis reſiſtentiae, quae motum corporis ab L ad FG ingredientis retardat, $= \frac{v^n}{c^n}$.

§. 13. A potentia p corpus, ſiue per LM ſiue per Lm deſcendat idem accipit celeritatis incrementum, quia FG ad directionem potentiae normalis ponitur. Altitudo autem v capiet augmentum $= pdx$. Reſiſtentia autem ita retardabit corpus per LM deſcendens, vt decrementum altitudinis v ſit $= \frac{v^n}{c^n}$LM. At ſi corpus per Lm incedere ponitur, erit decrementum altitudinis $v = \frac{v^n}{}$

$\frac{v^n}{c^n}$ Lm. Quare celeritas, qua elementa L M et Lm percurruntur, debetur altitudini v; celeritas vero per M N altitudini $v+pdx-\frac{v^n}{c^n}$ L M, et celeritas per mN altitudini $v+pdx-\frac{v^n}{c^n}$Lm.

§. 14. His cum noſtro lemmate comparatis habebimus $q=v$, $q+dt=\sqrt{(v+pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{LM})}=\sqrt{v+pdx-\frac{v^n}{c^n}.\text{LM}}$; adeoque $dt=\frac{pdx-\frac{v^n}{c^n}ds}{2\sqrt{v}}$. Atque $q+dt+dd\theta=\sqrt{(v+pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{L}m)}=\sqrt{v+\frac{pdx-\frac{v^n}{c^n}\text{L}m}{2\sqrt{v}}}$

Ex his fiet ergo $dd\theta=\frac{v^n(\text{LM}-\text{L}m)}{2c^n\sqrt{v}}=-\frac{v^n.\text{FM}.\text{M}m}{2c^n.\text{LM}.\sqrt{v}}$ conſequenter $\frac{dd\theta}{\text{M}m}=-\frac{v^n dy}{2c^n ds\sqrt{v}}$. Sequens igitur ex iſtis orietur aequatio ſingulis per $2\sqrt{v}$ multiplicatis, $\frac{2vdx^2ddy}{ds^3}=\frac{pdxdy}{ds}-\frac{v^n dv}{c^n}+\frac{v^n dy}{c^n}$ ſeu $2vdxddy=pdyds^2$. Hanc igitur proprietatem, vt ſit $v=\frac{pdyds^2}{2dxddy}$, curua brachyſtochrona habere debet, ex eaque facile erit eam inuenire.

§. 15. Quia ii termini, in quos resistentia $\frac{v^n}{c^n}$ ingreditur sese mutuo destruunt, hoc lemma latissime patet et ad quamcunque resistentiam potest accommodari, sine vlla mutatione. Haec est igitur proprietas vniuersalis omnium brachystochronarum tam in vacuo, quam in quocunque medio resistente. Sed quo facilius istud lemma memoria teneri queat, aliam formam ei inducemus.

§. 16. Aequatio inuenta $2vdxddy = pdyds^2$ si diuidatur per ds^3 abit in hanc $\frac{2vdxddy}{ds^3} = \frac{pdy}{ds}$, in qua $\frac{pdy}{ds}$ exprimit vim normalem resolutione vis sollicitantis p ortam. In altero membro $\frac{2vdxddy}{ds^3}$ significat $\frac{ds^3}{dxddy}$ radium osculi curuae LMN secundum plagam F porrectum. At quia curua versus F est conuexa radius osculi in plagam oppositam G erit directus, et habet idcirco valorem negatiuum. Eius ergo longitudo erit $-\frac{ds^3}{dxddy}$. Quare posito radio osculi $= r$, et vi normali $=$ N habebitur ista aequatio $\frac{2v}{r} =$ N. Denotat autem $\frac{2v}{r}$ vim centrifugam, qua corpus, quatenus in recta linea progredi nequit, curuam, in qua mouetur, premit. Hanc ob rem omnis brachystochrona hanc habebit proprietatem, vt vis normalis aequalis sit vi centrifugae.

Figura 2. §. 17. Notandum autem est omne corpus, quod a quapiam vi sollicitatum siue in vacuo siue in medio resistente super concaua parte curuae cuiusdam AMB incedit, curuam duplici vi premere, vi scilicet normali a potentia sollicitante orta, et vi sua centrifuga. Sit MI potentia solli-

ſollicitans corpus in M; haec reſolui ſolet in duas alias MK, KI, quarum illius directio MK normalis eſt in curuam et propterea vis haec normalis appellatur, alterius KI directio eſt ſecundum curuae tangentem et tangentialis vocatur. Perſpicuum igitur eſt harum virium normalem ſolam corpus ad curuam apprimere. Secundum eandem directionem MK praeterea curua AMB in M premitur a vi centrifuga, quae ſe habet ad vim grauitatis, vt altitudo celeritatem generans v ad dimidium radii oſculi MO.

§. 18. Si ergo curua AMB ſiue in vacuo ſiue in medio reſiſtente quocunque ita fuerit comparata, vt corporis ſuper ea deſcendentis ambae vires, quibus curua premitur ſcilicet normalis et centrifuga, inter ſe fuerint aequales, curua ſemper erit brachiſtochrona, ſeu corpus ſuper ea minori tempore ex A ad M deſcendit, quam ſuper alia quacunque linea per A et M transeunte. Haec igitur aequalitas inter vim normalem et vim centrifugam vera et vniuerſalis eſt lex omnium curuarum brachyſtochronarum, eiusque beneficio in quacunque et potentiae ſollicitantis et reſiſtentiae hypotheſi in promtu erit curuas brachyſtochronas determinare.

§. 19. Quia in vacuo ſecundum *Theorema Hugenianum* celeritas proportionalis eſſe debet ſinui anguli, quem curua cum directione potentiae conſtituit, i. e. ipſi $\frac{MK}{MI}$, erit $\frac{MK^2}{MI^2.MO}$ proportionale ipſi MK ſeu $\frac{MK}{MI}$ ipſi MI. MO. Omnes igitur brachyſtochronae in vacuo hanc habent proprietatem, vt ſinus anguli, quem directio potentiae cum curua facit, vbique ſit proportionalis radio oſculi

oſculi et potentiae ſollicitanti coniunctim. Quare huius regulae ope ſine celeritatis determinatione omnes brachyſtochronae in vacuo facile inuenientur.

§. 20. Initium autem curuae A, in quo omnes deſcenſus ex quiete fieri debent, ſemper in eo eſt loco, in quo curuae tangens in directionem potentiae incidit. In hoc enim loco in vacuo ipſa corporis celeritas propter angulum curuae cum directione potentiae euaneſcentem fit aequalis o. In medio autem reſiſtente ipſum motus initium a vacuo non differt, et hanc ob rem etiam hoc caſu tangens initii curuae cum potentiae directione congruere debet. Huius vero ratio eſt habenda in adiectione conſtantium quantitatum, quando aequationem differentio-differentialem brachyſtochronae integramus, et efficere debemus, vt curua datum habeat initium et per datum punctum transeat.

Figura 3. §. 21. Illuſtremus regulam §. 19. pro brachyſtochronis inueniendis in vacuo datam exemplis, ſitque potentia ſollicitans conſtans $=g$, eius directio verticalis ſecundum PM. Brachyſtochrona vero quaeſita ſit AM et abſciſſae in recta horizontali AP per initium curuae tranſeunte accipiantur. His factis ſit $AP=y$, $PM=x$, $AM=s$, eritque ſinus anguli, quem PM cum curua conſicit $=\frac{dy}{ds}$, et radius oſculi $=\frac{ds^3}{dx\,ddy}$, poſito dx conſtante, qui ob potentiam conſtantem proportionalis eſſe debet ipſi $\frac{dy}{ds}$. Fiat igitur $\frac{ds^3}{dx\,ddy}=\frac{a\,dy}{ds}$ ſeu ob $ddy=\frac{ds\,dds}{dy}$ hoc modo $ds^2=a\,dx\,dds$. Diuidendo per ds^2 et integrando prodit $s=C-\frac{a\,dx}{ds}$. Quia facto $s=o$ fieri debet.

debet $dx = ds$, erit $C = a$ et ideo $sds = ads - adx$, quae porro integrata dat $s^2 = 2as - 2ax$ aequationem pro cycloide vt constat.

§. 22. Sit porro C centrum virium attrahens in ratione quacunque multiplicata distantiarum, cuius exponens sit m. Curua AM sit brachystochrona pro corpore in vacuo moto. Dicatur $CA = a$, $CM = y$, et perpendiculum CT in tangentem MT ex C demissum $= z$. Vis ergo in M secundum MC corpus trahens erit vt y^m, sinus anguli curuae cum hac directione erit $= \frac{z}{y}$, et radius osculi erit $= -\frac{ydy}{dz}$. Quare vi regulae erit $\frac{z}{y}$ vt $\frac{y^{m+1}dy}{dz}$ seu $Azdz = y^{m+2}dy$, cuius integralis est $C + Az^2 = y^{m+3}$. Quia si $y = a$ fit $z = 0$, erit $C = a^{m+3}$, et consequenter $Az^2 = a^{m+3} - y^{m+3}$, arbitraria A negatiue sumta. Haecque aequatio omnes brachystochronas, quae circa centra virium existunt, complectitur. Fig. 4.

§. 23. Reuertamur autem ad medium resistens in ratione quacunque multiplicata celeritatum, cuius exponens sit $2n$. Potentia sollicitans vero ponatur constans $= g$ et habens directionem verticalem vbique ipsi AP parallelam. Sit AMB curua celerrimi descensus inuenienda, in qua ponamus $AP = x$, $PM = y$ et $AM = s$. Celeritas porro in M debita sit altitudini v, quare resistentia in M erit $= \frac{v^n}{c^n}$. Vnde ex sollicitatione potentiae et effectu resistentiae simul habebitur $dv = gdx - \frac{v^n ds}{c^n}$. Brachystochronismus vero dat $2vdxddy = gdyds$, Figura 5.

posito dx constante (§. 14.). Ex quibus aequationibus coniunctis exterminata littera v prodibit aequatio pro curua brachystochrona quaesita.

§. 24. Propter dx constans erit $ddy = \frac{ds\,dds}{dy}$ ideoque $v = \frac{g\,ds\,dy^2}{2\,dx\,dds}$. Ergo $dv = \frac{g\,dy^2\,dds^2 + 2g\,ds^2\,dds^2 - g\,ds\,dy^2\,d^3s}{2\,dx\,dds^2}$. His valoribus substitutis in aequatione $dv = g\,dx - \frac{v^n\,ds}{c^n}$ habebitur $\frac{g\,ds\,dy^2\,d^3s - 3g\,dy^2\,dds^2}{2\,dx\,dds^2} = \frac{g^n\,ds^{n+1}\,dy^{2n}}{2^n c^n\,dx^n\,dds^n}$ seu $ds\,d^3s - 3\,dds^2 = \frac{g^{n-1}\,ds^{n+1}\,dy^{2n-2}}{2^{n-1}\,c^n\,dx^{n-1}\,dds^{n-2}}$. Haec aequatio, si medium resistens sit infinite rarum seu in vacuum transmutatur, quo casu fit $c = \infty$, abit in $ds\,d^3s = 3\,dds^2$, cuius integralis est $a\,dx\,dds = ds^3$. Quae quod sit ad cycloidem §. 21. ostendimus.

§. 25. Ad aequationem autem generalem construendam pono $ds = p\,dx$, vt sit $dds = dp\,dx$ et $d^3s = dx\,ddp$. Hinc erit $dy = dx\sqrt{(p^2-1)}$ et $v = \frac{g\,p\,dx\,(p^2-1)}{2\,dp}$. Ipsa autem aequatio abibit in hanc $p\,ddp - 3\,dp^2 = \frac{g^{n-1}\,p^{n+1}\,dx^n\,(p^2-1)^{n-1}}{2^{n-1}\,c^n\,dp^{n-2}}$. Ponatur porro $dx = q\,dp$, eritque $ddp = -\frac{dp\,dq}{q}$. Quo substituto prodibit $-\frac{pdq - 3q\,dp}{q^{n+1}} = \frac{g^{n-1}\,p^{n+1}\,(p^2-1)^{n-1}\,dp}{2^{n-1}\,c^n}$. Multiplicetur haec aequatio per $n\,p^{-3n-1}$; quo facto habebitur ——

$$-\frac{np^{-3n}dq-3np^{-3n-1}qdp}{q^{n-1}}=\frac{ng^{n-1}p^{-2n}(p^2-1)^{n-1}dp}{2^{n-1}c^n}$$

Cuius integralis est $\frac{2^{n-1}c^n}{ng^{n-1}p^{3n}q^n}=\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}$. Ponatur breuitatis gratia $\frac{ng^{n-1}}{2^{n-1}c^n}\int\frac{(p^2-1)^{n-1}dp}{p^{2n}}=\mathrm{P}^{-n}$, quae quantitas conceſſis quadraturis, ſi integratio non ſuccedit, ſemper poteſt exhiberi. Quo ergo poſito erit $p^3q=\mathrm{P}$, atque ob $q=\frac{dx}{dp}$, fiet $dx=\frac{\mathrm{P}dp}{p^3}$. Conſequenter $x=\int\frac{\mathrm{P}dp}{p^3}$, $s=\int\frac{\mathrm{P}dp}{p^2}$ et $y=\int\frac{\mathrm{P}dp\sqrt{(p^2-1)}}{p^3}$. Quare in quacunque medii reſiſtentis hypotheſi brachyſtochrona hoc modo poterit conſtrui.

§. 26. Si reſiſtentia medii ſit vt quadratum celeritatis erit $n=1$, ideoque $\mathrm{P}^{-1}=\frac{1}{c}\int\frac{dp}{p^2}=\frac{1}{ac}-\frac{1}{cp}=\frac{p-a}{acp}$ Quare fiet $\mathrm{P}=\frac{acp}{p-a}$; atque $p^2q=\frac{ac}{p-a}=\frac{p^2dx}{dp}$, ſeu $dx=\frac{acdp}{p^2(p-a)}$, cuius integralis eſt $x=b+\frac{c}{p}+\frac{c}{a}l\frac{p-a}{p}=b+\frac{cdx}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds}$. In qua aequatione, quia facto $x=0$, debet eſſe $ds=dx$, fiet $b=-c-\frac{c}{a}l(1-a)$. Habebitur ergo pro curua quaeſita haec aequatio $x=\frac{c(dx-ds)}{ds}+\frac{c}{a}l\frac{ds-adx}{ds-ads}$. Vel ſi aequatio a logarithmis libera deſideretur, haec differentio-differentialis, $acdxddx=ds^3-adxds^2$ poſito dx conſtante. Haec alio modo diſpoſita abit in hanc $\frac{acdxddx}{ds^2}=ds-adx$, cuius integralis eſt $s-ax=ac-\frac{acdx}{ds}$ ſeu $sds-axds=acds-acdx$. Quae integrata dat $s=cl^{\frac{s-ax-ac+c}{c-ac}}$ ſeu $e^{\frac{s}{c}}(c-ac)=s-ax+c-ac$. Huius curuae punctum infimum B ibi erit

vbi eſt $s = a(x+c)$. Hoc igitur caſu erit $AB = c\,l\frac{1}{1-a}$ et $AC = \frac{c}{a}\,l\frac{1}{1-a} - c$.

§. 27. Si autem *Theoremate Hugeniano* tanquam ad hunc caſum idoneo vſi eſſemus, ſtatim hanc habuiſſemus inde aequationem $v = \frac{ady^2}{ds^2}$. Hincque $dv = \frac{2adxddy}{ds^2} = gdx - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-1}}$ ſeu $2adxddy = gdxds^2 - \frac{a^n dy^{2n}}{c^n ds^{2n-4}}$. Quae facto $ds = pdx$ abit in $\frac{2apdp}{\sqrt{(p^2-1)}} = gpx^2dx - \frac{a^n dx(p^2-1)^n}{c^n p^{2n-4}}$ quae iam per ſe eſt ſeparata, ideoque conſtrui poteſt. Si ponatur $n = 1$, vt brachyſtochrona pro medio reſiſtente in duplicata celeritatum ratione prodeat, erit $2acdx^2ddy = cgdxds^3 - ady^2ds^2$ ſeu $2acdx^2 dds = cgdxdyds^2 - ady^3ds$. Quae aequatio, etiamſi lemmate ſimpliciore nitatur, tamen multo magis eſt compoſita et perplexa, quam noſtra brachyſtochrona inuenta; id quod per ſe ſaepe veritatis criterium eſſe ſolet, praecipue ſi operoſior calculus eo deduxerit.

§. 28. Quo autem appareat, qualem figuram brachyſtochrona noſtra in medio ſecundum celeritatis quadrata reſiſtente habitura ſit, aequationem ſumamus hanc $e^{\frac{s}{c}}(c-ac) = s - ax + c - ac$. Haec, in ſeriem conuerſo $e^{\frac{s}{c}}$, abit in hanc $(c-ac)(1 + \frac{s}{c} + \frac{s^2}{1.2.c^2} + \frac{s^3}{1.2.3.c^3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.c^4} + \text{etc.}) = s - ax + c - ac$, ex qua reperitur poſito $\frac{1}{a} = a = k$ haec aequatio $x = s - \frac{ks^2}{1.2.c} - \frac{ks^3}{1.2.3.c^2} - \frac{ks^4}{1.2.3.4.c^3} - \text{etc.}$ Perſpicitur ergo k neceſſario eſſe debere numerum affirmatiuum, alias enim fieret $x > s$ quod fieri nequit; erit

erit ergo $a = \frac{1}{1+k}$. Ex hac ſerie, quia vehementer conuergit facile pro quouis valore ipſius s reſpondens ipſius x inuenietur. Praeterea intelligitur curuam hanc vltra A continuari in Am, quae ſimilis eſt ipſi AM.

§. 29. Quomodo vero curua vltra B porrigatur hac ratione inueſtigo. Ducto ex B axe verticali BD, in eumque applicata MQ, ſit $BQ = PC = u$, arcus $BM = t$. Hoc poſito erit $s = cl\frac{1}{1-a} - t$, et $x = \frac{c}{a} l\frac{1}{1-a} - c - u$, quibus ſubſtitutis haec emergit aequatio $ce^{\frac{-t}{c}} = au - t + c$ vel haec differentialis, $tdt - audt = acdu$. Per ſeriem vero habebitur $au = \frac{t^2}{1.2.c} - \frac{t^3}{1.2.3.c^2} + \frac{t^4}{1.2.3.4.c^3} - \text{etc.}$ Quae aequatio prorſus congruit cum ea, quam A. 1729. pro tautochrona aſcenſui in eadem reſiſtentiae hypotheſi inueni. Altera igitur portio curuae vltra axem BD ſita erit tautochrona ad deſcenſum pertinens. Habebit ergo curua brachyſtochrona huiusmodi formam EABCD in- Figura 6.
finitis cuſpidibus A, C etc. praeditam, quarum alterni ſunt altiores vt A, alterni humiliores vt C. Rami vero ex vtraque cuſpidis cuiusque parte ſunt inter ſe aequales et ſimiles. Eleuatio altiorum cuſpidum eſt $\frac{c}{a} l\frac{1}{1-a} - c$ humiliorum vero eſt $c - \frac{c}{a} l(1+a)$. Ipſi vero rami altiores AB vel AE ſunt $= cl\frac{1}{1-a}$ depreſſiorumque CB, CD longitudo eſt $= cl(1+a)$. Conuenientia ceterum iſta inter tautochronam et brachyſtochronam praeter vacuum etiam in hac reſiſtentiae hypotheſi praecipue conſiderari meretur, et disquirendum reſtat, num forte in reliquis reſiſtentiae hypotheſibus ſimilis analogia locum obtineat? Id quod tautochronarum inuentionem per ſe difficillimam redderet facillimam.

DE PROGRESSIONIBVS HARMONICIS OBSERVATIONES.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

PRogreſſionum harmonicarum nomine intelliguntur omnes ſeries fractionum, quarum numeratores ſunt aequales inter ſe, denominatores vero progreſſionem arithmeticam conſtituunt. Huiusmodi ergo forma generalis eſt $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$, etc. Quique enim tres termini contigui vt $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$, $\frac{c}{a+3b}$ hanc habent proprietatem, vt differentiae extremorum a medio ſint ipſis extremis proportionales. Scilicet eſt $\frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+2b} : \frac{c}{a+b} - \frac{c}{a+3b} = \frac{c}{a+b} : \frac{c}{a+3b}$. Cum autem haec ſit proprietas proportionis harmonicae; vocatae ſunt iſtiusmodi fractionum ſeries progreſſiones harmonicae. Vocari etiam poſſent reciprocae primi ordinis, quia in termino generali $\frac{c}{a+(n-1)b}$ index n vnicam eamque negatiuam habet dimenſionem.

§. 2. Quanquam in his ſeriebus termini perpetuo decreſcunt; tamen ſumma huiusmodi ſerici in infinitum continuatae ſemper eſt infinita. Ad hoc demonſtrandum non opus eſt methodo hasce ſeries ſummandi; ſed veritas facile ex ſequente principio elucebit. Series quae in infinitum continuata ſummam habet finitam, etiamſi ea

ſi ea duplo longius continuetur nullum accipiet augmentum, ſed id quod poſt infinitum adiicitur cogitatione, re vera erit infinite paruum. Niſi enim hoc ita ſe haberet, ſumma ſeriei etſi in infinitum continuatae non eſſet determinata et propterea non finita. Ex quo conſequitur, ſi id, quod ex continuatione vltra terminum infiniteſimum oritur, ſit finitae magnitudinis, ſummam ſeriei neceſſario infinitam eſſe debere. Ex hoc ergo principio iudicare poterimus, vtrum ſeriei cuiusque propoſitae ſumma ſit infinita an finita.

§. 3. Sit itaque ſeries $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2b}$ etc. in infinitum continuata, terminusque infiniteſimus $\frac{c}{a+(i-1)b}$, denotante i numerum infinitum, qui ſit index huius termini. Iam haec ſeries vlterius continuetur a termino $\frac{c}{a+ib}$ vsque ad terminum $\frac{c}{a+(ni-1)b}$ cuius exponens eſt ni. Horum terminorum igitur inſuper adiectorum numerus eſt $(n-1)i$; Summa eorum vero minor erit quam $\frac{(n-1)ic}{a+ib}$ maior vero quam $\frac{(n-1)ic}{a+(ni-1)b}$. Sed quia i eſt infinite magnum, evanescet a in vtroque denominatore. Quare ſumma maior erit quam $\frac{(n-1)c}{nb}$ at minor quam $\frac{(n-1)c}{b}$, Ex quo perſpicitur hanc ſummam eſſe finitam, atque conſequenter ſeriei propoſitae $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, etc. in infinitum continuatae ſummam infinite magnam.

§. 4. Huius autem ſummae terminorum ab i ad ni limites propiores ex ſequentibus proportionis harmonicae proprietatibus eliciuntur. Scilicet omnis proportio harmonica ita eſt comparata, vt terminus medius minor

ſit

sit quam pars tertia summae terminorum omnium. Hanc ob rem terminus medius inter $\frac{c}{a+b}$ et $\frac{c}{a+(ni-1)b}$, qui est $\frac{c}{a+\frac{(ni+i-1)}{2}b}$, ductus in terminorum numerum $(n-1)i$, seu $\frac{(n-1)ic}{a+\frac{(ni+i-1)}{2}b}$ minor erit quam summa terminorum Siue terminorum summa hinc maior erit quam $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ ob i infinitum. Praeterea medium arithmeticum inter terminos extremos maius est parte tertia summae terminorum. Ex hoc sequitur fore etiam in serie harmonica terminorum summam minorem quam $(n-1)i$ in medium arithmeticum terminorum extremorum, quod est $\frac{(2a+(ni+i-1)b)c}{2(a+ib)(a+(ni-1)b)}$ seu $\frac{(n+1)c}{2nib}$, ductum. Quare summa erit minor quam $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, ita vt hi duo limites sint $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ et $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, adeoque summa proxime $=\frac{(n-1)c}{b\sqrt{n}}$ quod est medium proportionale inter limites.

§. 5. Ex his colligere licet, quibus casibus haec series magis vniuersalis $\frac{c}{a}$, $\frac{c}{a+b}$, $\frac{c}{a+2^\alpha b}$ etc. in infinitum vsque ad $\frac{c}{a+i^\alpha b}$ habeat summam finitam vel infinitam. Sequantur enim terminum vltimum termini $(n-1)i$, eritque horum summa minor quam $\frac{(n-1)c}{i^{\alpha-1}b}$, at maior quam $\frac{(n-1)c}{n^{\alpha-1}ic}$. Quare si fuerit α numerus vnitate maior

maior, ſumma horum terminorum ſequentium erit $=0$, et propterea ſumma progreſſionis finita. At ſi ſit $\alpha < 1$, ſumma terminorum ſequentium erit infinita; quocirca ipſius progreſſiones ſumma in infinities maiore gradu erit infinita. Inter has igitur progreſſiones ſola harmonica, in qua $\alpha = 1$, hanc habet proprietatem, vt ſumma eius in infinitum continuatae ſit infinite magna, terminorum vero ſequentium poſt terminum infiniteſimum ſumma finita.

§. 6. Quanta vero ſit ſumma terminorum a termino indicis i ad terminum indicis ni ſequenti modo inueſtigo. Ponatur ſumma ſeriei $\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}$ - - - - - - - - $\frac{c}{a+(i-1)b}$ ad terminum indicis i vsque $=s$, quae eſt quantitas ex a, b, c et i determinanda. Creſcat i vnitate, habebitque s pro augmento terminum ſequentem $\frac{c}{a+ib}$. Quare erit $di : ds = 1 : \frac{c}{a+ib}$ ſeu $ds = \frac{c\,di}{a+ib}$. Vnde inuenitur $s = C + \frac{c}{b} l(a+ib)$, denotante C quantitatem quandam conſtantem. Apparet quoque ex hac forma ſummam eiusdem ſeriei ab initio ad terminum indicis ni continuatae fore $= C + \frac{c}{b} l(a+nib)$. Harum igitur ſummarum differentia $\frac{c}{b} l \frac{a+nb}{a+ib} = \frac{c}{b} ln$ (euaneſcente a) dabit ſummam terminorum ab $\frac{c}{a+ib}$ vsque ad $\frac{c}{a+nib}$. Quia autem huius ſummae limites ſupra aſſignauimus erit $\frac{c}{b} ln$ maior quam $\frac{2(n-1)c}{(n+1)b}$ atque minor quam $\frac{(n^2-1)c}{2nb}$, ſeu $ln > \frac{2(n-1)}{n+1}$ atque $ln < \frac{n^2-1}{2n}$.

§. 7. Infra oſtendemus quantitatem illam conſtantem C eſſe finitam, eamque definire conabimur. Eua-

neſcet ergo C in ſumma, fietque progreſſionis $\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}$ ----- $\frac{c}{a+(i-1)b}$ exiſtente terminorum numero infinito $= i$, ſumma $= \frac{c}{b} l(a+ib) = \frac{c}{b} li$. Quamobrem ſumma erit vt logarithmus numeri terminorum, hincque infinities minor quam radix quantumuis magnae poteſtatis ex numero terminorum; nihilo tamen minus eſt infinite magna.

§. 8. Ex hac conſideratione innumerabiles oriuntur ſeries ad logarithmos quorumuis numerorum deſignandos. Sumamus primo hanc progreſſionem harmonicam $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. pro qua fit $a = 1, b = 1, c = 1$. Differentia igitur inter hanc ſeriem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ----- $\frac{1}{i}$ ad terminum indicis i continuatam, et eandem $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ ----- $\frac{1}{ni}$ ad terminum indicis ni continuatam, erit $= ln$. Quare illa ſeries ab hac ſubtracta relinquit ln. Quia autem huius ſeriei numerus terminorum eſt n vicibus maior quam illius, ab n terminis ſeriei $1 + \frac{1}{2}$ ------ $\frac{1}{ni}$ ſubtrahi oportet vnicum alterius ſeriei $1 + \frac{1}{2}$ ----- $\frac{1}{i}$, quo ſubtractio in infinitum eodem modo poſſit perfici. Quare erit $ln = 1 + \frac{1}{2}$ ------ $\frac{1}{n}$.

$$- 1 + \frac{1}{n+1} \text{ ---- } \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} \text{ ----- } \frac{1}{3n} + \text{ etc.}$$
$$- \quad - \quad - \quad - \frac{1}{2} \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \frac{1}{3}$$

Si igitur inferioris ſeriei ſinguli termini a ſupra ſcriptis terminis ſuperioris ſeriei actu ſubtrahantur, et pro n numeri integri ſcribantur $2, 3, 4$ --- etc. ſucceſſiue ſequentes logarithmorum ſeries obtinebimus.

$l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12}$ etc.

$l3 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{2}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{2}{12}$ etc.

$l4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{3}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{3}{12}$ etc.

$l5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{4}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{4}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$ etc.

$l6 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{5}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{5}{12}$ etc.

etc. etc.

Vnde pro cuiusuis numeri logarithmo facile series conuergens inuenitur.

§. 9. Ex his seriebus aliae eiusdem formae, quae summam habeant rationalem, possunt deriuari, Nam, quia seriei $= l2$ duplum aequale est $l4$, si series $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{4}$ etc. subtrahatur ab hac $2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4}$ etc. residuum, nempe haec series $1 - \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{8}$ etc. erit $= 0$, seu $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{3}{10}$ etc. Similiter si series $l6$ exhibens subtrahatur a summa serierum $l2$ et $l3$ exhibentium, residuum, nempe $1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{8} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9} - \frac{1}{10}$ etc. erit $= 0$ seu $1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} + \frac{1}{10}$ etc. Pari modo huiusmodi series innumerabiles poterunt inueniri.

§. 10. Series illae logarithmos exprimentes conuergunt quidem, sed admodum tarde, quare, quo earum ope logarithmi commode erui queant, requiritur aliquod subsidium. Ad quod inueniendum notari oportet eas series non aequabiliter progredi, sed certas habere reuolutiones, quae tot terminis absoluuntur, quot n habet vnitates, tot igitur terminos simul sumtos vnum seriei membrum vocabo. Ita in seriei pro $l2$ duo termini constituent vnum membrum, in serie pro $l3$, tres, in serie pro $l4$ quatuor et ita porro. Membra igitur ista

aequabilem conſtituent ſeriem, et ad logarithmos inueniendos oportet aliquot membra addi. Ponamus iam m membra eſſe addita ad logarithmum binarii inueniendum; poteritque loco omnium ſequentium addi $\frac{1}{4m}$, id quod eo propius accedet, quo maior fuerit numerus m. Ad $l3$ inueniendum ad m membra iam addita loco omnium ſequentium addatur $\frac{1}{9m}$. Similiter pro $l4$ addi debet $\frac{1}{16m}$ et ita porro. Fluunt haec ex modo ſummandi (§. 6) adhibito, in quo cum m debeat eſſe quantitas valde magna, neglexi in differentiali numeros ipſi m adiectos, ne integratio a logarithmis pendeat.

§. 11. Quo autem ſeriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{i}$ ſumma, etiamſi infinita accurate determinetur, ſingulos terminos ſequenti modo exprimo.

Eſt $1 = l2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7}$ etc.

atque $\frac{1}{2} = l\frac{3}{2} + \frac{1}{2.4} - \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} - \frac{1}{5.32}$ etc.

$\frac{1}{3} = l\frac{4}{3} + \frac{1}{2.9} - \frac{1}{3.27} + \frac{1}{4.81} - \frac{1}{5.243}$ etc.

$\frac{1}{4} = l\frac{5}{4} + \frac{1}{2.16} - \frac{1}{3.64} + \frac{1}{4.256} - \frac{1}{5.1024}$ etc.

.

.

.

$\frac{1}{i} = l\frac{i+1}{i} + \frac{1}{2.i^2} - \frac{1}{3.i^3} + \frac{1}{4.i^4} - \frac{1}{5.i^5}$ etc.

His ſeriebus additis prodibit

$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i} = l(i+1) + \frac{1}{2}(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\text{etc.})$ in infin.
$-\frac{1}{3}(1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\frac{1}{64}+\text{etc.})$
$+\frac{1}{4}(1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{256}+\text{etc.}$
etc.

Quae

Quae ſeries, cum ſint conuergentes, ſi proxime ſummentur prodibit $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}---\frac{1}{i}=l(i+1)+0{,}577218$ Si ſumma dicatur s, foret, vt ſupra fecimus, $ds=\frac{di}{i+1}$, ideoque $s=l(i+1)+C$. Huius igitur quantitatis conſtantis c valorem deteximus, quippe eſt $C=0{,}577218$.

§. 12. Si ſeries $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-----\frac{1}{i}$ vlterius in infinitum continuetur, et in membra diuidatur, quorum quodvis vt ipſa ſeries i terminos contineat; erit membrum inter $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{2i}$ contentum $=l2$, ſequens $=l\frac{3}{2}$, tertium $=l\frac{4}{3}$, etc. Atque cum ipſius ſeriei ſumma ſit log. infiniti, poterit ad analogiam poni $l\frac{1}{0}$. Hocque modo ſequens ſchema obtinebimus non parum curioſum

Series	$1+\frac{1}{2}---\frac{1}{i}$	$---\frac{1}{2i}$	$---\frac{1}{3i}$	$---\frac{1}{4i}$	$---\frac{1}{5i}$	etc.
Summae	$l\frac{1}{0}$	$l\frac{2}{1}$	$l\frac{3}{2}$	$l\frac{4}{3}$	$l\frac{5}{4}$	

§. 13. Difficile quidem videatur has easdem proprietates progreſſionum harmonicarum et logarithmorum expreſſiones analytice, eoque modo, quem alibi ad ſeries ſummandas tradidi, inuenire. At rem attentius perpendenti hoc non ſolum fieri, ſed multo generalius etiam fieri poſſe deprehenſum eſt. Conſidero enim non ſimplicem progreſſionem harmonicam, ſed cum geometrica coniunctam, cuiusmodi eſt $\frac{cx}{a}+\frac{cx^2}{a+b}+\frac{cx^3}{a+2b}+\frac{cx^4}{a+3b}$ etc. Huius ſummam pono s, et vtroque per $bx^{\frac{a-b}{b}}$ multiplicato erit $bx^{\frac{a-b}{b}}s=\frac{bcx^{\frac{a}{b}}}{a}+\frac{bcx^{\frac{a+b}{b}}}{a+b}+\frac{bcx^{\frac{a+2b}{b}}}{a+2b}$

Sumtisque differentialibus habebitur $bD.x^{\frac{a-b}{b}}s=dx(cx^{\frac{a-b}{b}}$

$+cx^{\frac{a}{b}}+cx^{\frac{a+b}{b}}+\text{etc.})=\frac{cx^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$ Sumtisq; iterum integralibus erit $bx^{\frac{a-b}{b}}s=c\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$ atque $s=\frac{cx^{a-b}}{b}\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}dx}{1-x}$

Ab hac serie iam subtraho hanc $\frac{fx^m}{g}+\frac{fx^{2m}}{g+b}+\frac{fx^{3m}}{g+2b}$ etc. cuius summa sit t. Multiplicetur per $\frac{b}{m}x^{\frac{m(g-b)}{b}}$ erit $\frac{b}{m}x^{\frac{m(g-b)}{b}}t=\frac{fbx^{\frac{mg}{b}}}{mg}+\frac{fbx^{\frac{m(g+b)}{b}}}{m(g+b)}+\frac{fbx^{\frac{m(g+2b)}{b}}}{m(g+2b)}$ etc.

Sumtisque differentialibus fiet $\frac{b}{m}\mathrm{D}\,x^{\frac{m(g-b)}{b}}t=dx(fx^{\frac{mg-b}{b}}+fx^{\frac{m(g+b)-b}{b}}+fx^{\frac{m(g+2b)-b}{b}}\text{ etc.})=\frac{fx^{\frac{mg-b}{b}}dx}{1-x^m}$

Quare habebitur $t=\frac{fm}{bx^{\frac{m(g-b)}{b}}}\int\frac{x^{\frac{m(g-b)}{b}}dx}{1-x^m}$. Ideoque $s-t=\frac{c}{bx^{\frac{a-b}{b}}}\int\frac{x^{\frac{a-b}{b}}}{1-x}-\frac{fm}{bx^{\frac{m(g-b)}{b}}}\int\frac{x^{\frac{mg-b}{b}}dx}{1-x^m}$. Subtractio vero ita debet fieri, vt a termino indicis m seriei s subtrahatur terminus primus seriei t, et a termino indicis $2m$ illius, terminus secundus huius serici et ita porro.

§. 14. Quo nostras series logarithmicas eruamus, sit $a=b$ et $g=b$. Quo facto erit $s=\frac{c}{b}\int\frac{dx}{1-x}=\frac{c}{b}l\frac{1}{1-x}$ et $t=\frac{f}{b}\int\frac{mx^{m-1}dx}{1-x^m}=\frac{f}{b}l\frac{1}{1-x^m}$. Ergo $s-t=$

$l($1 –

$l\frac{(1-x^m)^{\frac{f}{b}}}{(1-x)^{\frac{c}{b}}}$. Quo autem haec expreſſio fiat finita facto $x=1$, debebit eſſe $\frac{f}{b}=\frac{c}{b}$, hanc ob rem fiant omnes hae litterae $=1$, eritque $s-t=l\frac{1-x^m}{1-x}=l(1+x+x^2\text{-----}x^{m-1})$ Quae expreſſio dat differentiam inter has ſeries $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$ etc. et $\frac{x^m}{1}+\frac{x^{2m}}{2}+\frac{x^{3m}}{3}$ etc. Quare ſi $m=2$ erit $l(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+$ etc. ſi $m=3$, erit $l(1+x+x^2)=x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\frac{2x^6}{6}+$ etc. ſimilique modo $l(1+x+x^2+x^3)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{3x^4}{4}+$ etc. In his ſi fiat $x=1$, prodibunt eaedem ſeries pro logarithmis numerorum naturalium, quas ante dedimus.

§. 15. Si $b=2g$, erit $t=\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{b}\int\frac{mx^{\frac{m-2}{2}}dx}{1-x^m}$. Ponatur $x^m=y$, erit $t=\frac{f\sqrt{y}}{b}\int\frac{dy}{(1-y)\sqrt{y}}=\frac{f\sqrt{y}}{b}l\frac{1+\sqrt{y}}{1-\sqrt{y}}=\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{b}l\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}$. Si praeterea ſit $a=b$ erit $s=\frac{c}{b}l\frac{1}{1-x}$. At s eſt ſumma huius ſeriei $\frac{cx}{a}+\frac{cx^2}{2a}+\frac{cx^3}{3a}$ etc. atque $tx^{\frac{-m}{2}}=\frac{f}{b}l\frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}}$ dat hanc ſeriem $\frac{fx^{\frac{m}{2}}}{g}+\frac{fx^{\frac{3m}{2}}}{3g}+\frac{fx^{\frac{5m}{2}}}{5g}$ +etc. Sit $a=1$ et $g=1$ erit $s-tx^{\frac{-m}{2}}=cl\frac{1}{1-x}-$

$\frac{f}{2} l \frac{1+x^{\frac{m}{2}}}{1-x^{\frac{m}{2}}} = l \frac{(1-x^{\frac{m}{2}})^{\frac{f}{2}}}{(1-x)^c (1+x^{\frac{m}{2}})^{\frac{f}{2}}}$. Quae expreſſio quo ſiat finita ſi $x = 1$ oportet ſit $\frac{f}{2} = c$ ſeu $f = 2c$. Sit igitur $c = 1$, et $m = 2n$ erit ſerierum $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$ etc. et $\frac{2x^n}{1} + \frac{2x^{3n}}{3} + \frac{2x^{5n}}{5}$ etc. differentia $= l \frac{1-x^n}{(1-x)(1+x^n)}$. Ponatur $n = 2$ erit differentia haec $= l \frac{1+x}{1+x^2}$ factoque $x = 1$, erit ea $= 0$, quare haec ſeries $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ etc. erit $= 0$, vt iam ſupra inuenimus.

§. 16. Huiusmodi ſeries ſummam rationalem habentes nunc ex hac ipſa forma $l \frac{1+x}{1+xx}$, infinitae aliae poſſunt inueniri, aſſumendis aliis formis ſimilibus quae facto $x = 1$ euanescant. Ex hac enim forma $l \frac{1+x}{1+x^2}$ ſi per ſeries exprimatur ſtatim reſultat ſeries inuenta. Eſt nimirum $l(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$ Atque $l(1+x^2) = \frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \frac{x^{10}}{5} - \text{etc.}$ Haec igitur ſeries a ſuperiore ſubtracta relinquit hanc $\frac{x}{1} - \frac{2x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{2x^6}{6}$ etc. cuius ſumma erit $l \frac{1+x}{1+x^2}$. Similiter $l \frac{1+x}{1+x^3}$ dabit hanc ſeriem $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^8}{8} - \frac{2x^9}{9}$ etc. Ergo poſito $x = 1$ erit $0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{2}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{2}{9}$ quam eandem iam §. 9. inuenimus.

§. 17. Hac ratione omnium huiusmodi irregularium ſerierum, quae tamen ſecundum membra regulariter procedunt, ſummae poterunt inueniri, ſemper enim vt differentiae duarum ſerierum ſunt aeſtimandae. Vt ſit propoſita haec ſeries $1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{2}{8}$ etc. Haec eſt differentia harum ſerierum $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$

$+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}$ etc. et $\frac{3x^2}{2}+\frac{3x^5}{5}+\frac{3x^8}{8}$ etc. facto $x=1$. Illius autem summa est $l\frac{1}{1-x}$, huius vero summa est $\int\frac{2x\,dx}{1-x^3}$ seu $l\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}l(x^2+x+1)+\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{2x+1-\sqrt{-3}}{2x+1+\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$. Hac igitur ab illa subtracta factoque $x=1$ prodibit $-\frac{1}{2}l3+\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}-\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1+\sqrt{-3}}{1-\sqrt{-3}}$, pro summa progressionis propositae. Est vero $\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{3+\sqrt{-3}}{3-\sqrt{-3}}$ peripheria circuli diuisa per $\sqrt{3}$ posito diametro $=1$ et $\frac{\sqrt{-3}}{2}l\frac{1-\sqrt{-3}}{1+\sqrt{-3}}$ huius dimidium. Quare seriei summa quam proxime erit 0,3576.

§. 18. At si etiam ipsa membra non vniformiter incedunt difficilius summa assignatur. Sumamus hanc seriem $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}-\frac{3}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{4}{14}$ etc. Haec est differentia inter has series $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots-\frac{1}{i\left(\frac{i+3}{2}\right)}$ et $\frac{2}{2}+\frac{3}{5}+\frac{4}{9}+\frac{5}{14}-\cdots-\frac{i+1}{i\left(\frac{i+3}{2}\right)}$ ita in infinitum continuatas, vt extremi termini eundem habeant denominatorem $i\left(\frac{i+3}{2}\right)$. Harum serierum prioris summa est $C+li+l(i+3)-l2$, denotante C constantem §. 11. inuentam, nempe 0,577718. Altera series subtrahenda in has duas resoluitur $\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{i}\right)$ et $\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\cdots-\frac{1}{i+3}\right)$. Illius summa est $\frac{2}{3}C+\frac{2}{3}li$; huius vero $\frac{4}{3}C-\frac{23}{9}+\frac{4}{3}l(i+3)$. Quae ambae ab illa summa $C+li+l(i+3)-l2$ subtractae relinquunt $-C+\frac{23}{9}-l2$ seu 1, 173078 quam proxime pro summa seriei propositae.

Danielis Bernoulli

DEMONSTRATIONES THEOREMATVM SVORVM DE OSCILLATIONIBVS CORPORVM FILO FLEXILI CONNEXORVM ET CATENAE VERTICALITER SVSPENSAE.

I.

Tabula IX

DEdi nuper theoremata de oscillationibus corporum filo flexili connexorum: demonstrationes autem, quas tum non vacabat in ordinem redigere, nunc paullo plus otii nactus eo libentius cum publico communicabo, quod multorum aliorum similium problematum solutio inde peti possit, eorum praesertim in quibus motus partium non sunt inter se paralleli. Inter huiusmodi problemata facillimum est atque a multis iam diu solutum, quod circa centra oscillationis inuenienda versatur. Ad ea quoque pertinet problema de motu mixto determinando, quo corpus ex pluribus diuersae grauitatis specificae partibus compositum in fluido descendit: pertinent porro theoremata, quae in Commentar. Tom. II. p. 200. a Patre cum publico communicata fuerunt: Praesertim autem methodus, quam mox exhibebo, cum successu adhibetur, quando in systemate corporum plurium lege aliqua inter se connexorum, situs vnius ex situ alterius cognito non potest immediate determinari,

nari, veluti cum corpus ſuper hypothenuſa trianguli in horizonte mobilis deſcendit; hic enim ſi vel noueris ſitum corporis in hypothenuſa, ipſius tamen trianguli ſitus in horizonte incognitus manebit niſi hunc aliunde determinare ſcias. Problema hoc poſtremum aliquando Patri meo propoſueram et plane inter ſe conuenerunt ſolutiones noſtrae; Eam, quae a Patre profecta eſt, Academia Commentariis ſuis inſeri curauit, vid. Tom. V. p. 11. Quae ad hanc claſſem pertinent, nouam mechanicae partem efficiunt: Principium autem, quo vti ſoleo ad huiusmodi problemata ſoluenda, tale eſt:

Puta in ſyſtemate ad momentum temporis corpora ſingula a ſe inuicem ſolui, nulla facta attentione ad motum iam acquiſitum, quia hic de acceleratione ſeu mutatione motus elementari tantum ſermo eſt: ita quolibet corpore ſitum ſuum mutante, ſyſtema aliam accepit figuram, quam non-ſolutum habere debebat: Igitur finge cauſam mechanicam quamcunque ſyſtema in debitam figuram reſtituentem atque, rurſus inquiro in mutationem ſitus ab hac reſtitutione ortam in quolibet corpore; et ex vtraque mutatione intelliges mutationem ſitus in ſyſtemate non ſoluto, indeque accelerationem retardationemue veram cuiusuis corporis ad ſyſtema pertinentis obtinebis.

Quomodo haec regula ad praeſens noſtrum de oſcillationibus corporum filo flexili ligatorum aut catenae verticaliter ſuſpenſae determinandis, negotium applicanda ſit, hic docebo, alia occaſione idem fortaſſe etiam

monſtraturus in problematis aliis partim iam a Patre meo tractatis partimque nouis.

Figura 1. II. Sit filum AHF grauitatis expers, duobus oneratum ponderibus in H et F, e puncto fixo A ſuſpenſa: faciant corpora oſcillationes veluti infinite paruas, ſintque eorundem diſtantiae a linea verticali AC, vt $2Ml$ ad $mL-ml+ML+Ml\pm V(4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2)$. Demonſtrandum eſt, oſcillationes in vtroque corpore fore iſochronas. Valores litterarum m, M, l et L infra dabuntur.

Erunt oſcillationes iſochronae, ſi fuerint vires acceleratrices in corporibus vt diſtantiae eorundem a linea verticali; nec enim differunt diſtantiae hae ab arcubus deſcribendis: Has igitur vires acceleratrices definiemus: ponatur pars fili HF extendi facillime, ita vt corpus F nihil amplius retineat: accelerabitur corpus iſtud verticaliter deorſum a grauitatis vi naturali: finge ita accelerari vt perueniat dato tempusculo ex F in E, dum eodem temporis puncto alterum corpus filo AH alligatum arculum HL deſcribit: ductae iam intelligantur horizontales LB et EC, quae quamuis ceu infinite paruae conſiderentur, ſint tamen arculo LH infinities maiores. Apparet ex mechanicis et theoria infinite paruorum, fore $HL=\frac{BL}{LA}\times FE$. Poſitis igitur corporibus in L et E ductisque rectis AL et LE, erit quidem filum AL inuariatae longitudinis, alterum autem LE iam maioris erit longitudinis quam fuerat in ſitu HF: concipiatur igitur cauſa, quae filum LE contrahat ad ſuam lon-

longitudinem naturalem: dico ab iſta contractione corpus ex E eleuatum iri vsque in u, alterumque retractum ex L in n: ſpatiola Eu, Ln determinabimus, poſtquam monuero, quod, ducta minima recta Fu, verae accelerationes, quae durante aſſumto tempusculo acceſſerunt, ſeu ipſae etiam vires acceleratrices rationem habiturae ſint in corporibus H et F vt Hn et Fu. Sed vt ratio intelligatur inter Hn et Fu, faciemus AH ſeu AL $= l$: HF ſeu $nu = L$: maſſa in corpore ſuperiori $= m$; in inferiori $= M$. Producatur AL et ex E in illam perpendicularis ED demittatur. Denique ducantur horizontalis HG et verticalis FG: erit Fu ad nu perpendicularis cenſenda atque triangulum minimum FEu triangulo HFG ſimile, ipſaque Eu lineolae FE aequalis: vnde ſi ponatur $BL = 1$; $DE = x$; erit $MC = 1 + \frac{L}{l}$; $EC = x + 1 + \frac{L}{l}$; $HG = CE - BL = x + \frac{L}{l}$; hinc

$$Fu = (\tfrac{1}{l} + \tfrac{x}{L}) \times FE:$$

Supereſt vt definiatur Hn. Notetur quod ſilum LE, dum contrahitur, corpus E directe ſurſum trahit; dum corpus alterum L oblique ad directionem ſuam Ln retrahit: hoc igitur titulo erit Ln ad Eu vt DE ad LE ſeu vt x ad L: ſed eſt praeterea Ln ad Eu reciproce vt maſſa corporis L ad maſſam corporis E, id eſt, directe vt M ad m: compoſita ratione erit $Ln : Eu = Mx : mL$; vnde poſita FE pro Eu, erit $Ln = \frac{Mx}{mL} \times FE$; et quia $Hn = HL - Ln$, ſequitur fore

$$Hn = (\tfrac{1}{l} - \tfrac{Mx}{mL}) \times FE:$$

ſunt igitur vires acceleratrices in corporibus H et F,

vt $\frac{1}{l}+\frac{x}{L}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: ponantur hae vires ad iſochronismum obtinendum proportionales ſpatiis deſcribendis LB et EC, ſeu fiat $(\frac{1}{l}+\frac{x}{L}):(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL})=1:(x+1+\frac{L}{l})$, atque reperietur facta reductione

$$x=\frac{mL-ml-ML-Ml\pm\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}}{2ML}$$

Huic autem ſi addatur MC ſeu $1+\frac{L}{l}$, habebitur

$$CE=\frac{mL-ml+ML+Ml\pm\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}}{2Ml}\times BL,$$

plane vt habet in parte huius argumenti prima theorema tertium Prop. 7.

III. Poſitis iisdem, erit longitudo penduli ſimplicis iſochroni aequalis

$$\frac{2mLl}{ml+mL+Ml+ML\mp\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}},$$

cuius rei rationem intelliges ex eo, quod ſi pendulum ſimplex longitudinis AH ſeu l conſideretur, ſit vis acceleratrix in hoc pendulo ſimplici ad vim acceleratricem corporis H in pendulo noſtro compoſito vt Hl ad Hn, id eſt, vt $\frac{1}{l}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: ſunt autem longitudines pendulorum iſochronorum in reciproca ratione virium acceleratricium; Erit igitur longitudo penduli quaeſiti ad longitudinem AH vt $\frac{1}{l}$ ad $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}$: vnde inuenitur longitudo penduli iſochroni $=\frac{mLl}{mL-Ml-Mx}$, et poſito valore pro x ſupra inuento, erit eadem longitudo, vt dictum eſt, aequalis

$$\frac{2mLl}{mL+ml+Ml+ML\mp\sqrt{[4mMLL+(ml+ML+Ml-mL)^2]}}$$

Figura 2. IV. Si filum AG ſit tribus oneratum corporibus in H, F et G, oſcillationes facientibus valde paruas et iſochro-

chronas, ponaturque maſſa corporis ſupremi $= m$; medii $= M$ et infimi $= \mu$: diſtantia $AH = l$; $HF = L$; $FG = \lambda$: diſtantia corporis H a linea verticali $AP = x$; diſtantia vero corporis F ab eadem linea verticali $= s$; erit

$$((MMl\lambda + M\mu l\lambda)ss + mMl\lambda + m\mu l L - mML\lambda - MMl\lambda - MML\lambda + m\mu l\lambda - M\mu l\lambda - M\mu L\lambda)s - m\mu l\lambda - mMl\lambda) \times ((M l\lambda + \mu l\lambda)s - mL\lambda - Ml\lambda - ML\lambda - \mu l\lambda - \mu L\lambda + mlL) = mm\mu llLLs.$$

Diſtantia autem corporis infimi a linea verticali erit pro quauis radice ipſius s aequalis

$$\left(\frac{MM\lambda}{m\mu L} + \frac{M\lambda}{mL}\right)ss + \left(1 + \frac{\lambda}{L} + \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{M\lambda}{\mu l} - \frac{MM\lambda}{m\mu L} - \frac{M\lambda}{m\mu l} - \frac{M\lambda}{mL} - \frac{M\lambda}{ml}\right)s - \frac{M\lambda}{\mu L} - \frac{\lambda}{L}.$$

Haec vt demonſtrentur, ponatur rurſus filum infimum FG facillime extendi atque ſic corpus G vi grauitatis naturali acceleratum, aſſumto aliquo tempuſculo infinite paruo verticaliter deſcendere ex G in s, dum interea ambo corpora ſuperiora accelerentur, vti in figura prima, faciendo arculos ſuos Hn et Fu. Patet autem, ſi Gs in figura ſecunda aequalis ponatur deſcenſui FE in figura prima, fore pariter arculos Hn et Fu idem in vtraque figura; erit igitur per praecedentem paragraphum $Hn = (\frac{1}{l} - \frac{Mx}{mL}) \times Gs$ et $Fu = (\frac{1}{l} + \frac{x}{L} \times Gs$, intelligendo per x lineolam uM perpendiculariter ad prolongatam An ductam, prouti deinceps per y intelligemus lineolam yv, quae perpendicularis eſt ad prolongatam nu: iam ducantur horizontalis FQ ac verticalis QG, ſumtaque

ſumtaque $uy = FG$, ducatur Gy. His ita ad calculum praeparatis, nunc rurſus ſingendum eſt, rectam us, in priſtinam longitudinem FG contrahi: ita eleuabitur corpus ex s in y vel in r (eſt autem yr nulla prae Gy); corpora autem ſuperiora iterum retrahentur ex n in o et ex u in m: atque ſic tandem patet fore vires acceleratrices in ſingulis corporibus ſecundum directiones ſuas naturales ad vim grauitatis naturalem, vt ſe habent Ho, Fm et Gy ad Gs: ſupereſt igitur vt ſingula haec elementa exprimantur, probe obſeruato arculos Hn, Fu etc. nullos eſſe prae diſtantiis corporum a linea verticali. Inuenietur autem recte inſtituto calculo $FL = \frac{\lambda}{l} + \frac{\lambda}{L}x + y$: et quia $FG : FQ = Gs : Gy$, erit

$$Gy = (\tfrac{1}{l} + \tfrac{\varkappa}{L} + \tfrac{y}{\lambda}) \times Gs.$$

Iam porro quaerendum eſt, quantae futurae ſint retrogradationes corporum in u et n poſitorum, quae fiunt, dum corpus infimum ex s in y aut in r eleuatur. Notetur potentiam filum us contrahentem vbique aequaliter diffundi. Erit igitur rurſus vt in ſuperiori paragrapho um ad sy ſeu ad Gs in ratione compoſita ex vy ad uy et maſſae μ ad maſſam M: vnde inuenitur $um = \frac{\mu y}{M\lambda} \times Gs$, qua ſubtracta ab Fu ſeu ab $(\frac{1}{l} + \frac{\varkappa}{L}) \times Gs$, oritur

$$Fm = (\tfrac{1}{l} + \tfrac{\varkappa}{L} - \tfrac{\mu y}{M\lambda}) \times Gs.$$

Denique quia ab eo, quod corpus medium ex u in m cedit, nihil patitur corpus ſupremum, erit, vt antea, no ad ys ſeu Gs in ratione compoſita ex Mu ad un et maſſae μ ad maſſam m; vnde $no = \frac{\mu\varkappa}{ML} \times Gs$: haeque ſub-

ſublata ab nH ſeu ab $(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL})\times$G$s$, fiet.

$$\text{H}o=(\tfrac{1}{l}-\tfrac{Mx}{mL}-\tfrac{\mu x}{mL})\times\text{G}s.$$

Poſtquam ſic acceleratione corporum ſingulorum in veris ſuis directionibus inuenimus, erunt hae diſtantiis ſuis ab linea verticali yP, uC et nB ſeu quantitatibus $(1+\frac{L}{l}+\frac{\lambda}{l}+x+\frac{\lambda}{L}x+y)$, $(1+\frac{L}{l}+x)$ et (1) proportionales faciendae iſochronismi ergo: Ita duae aequationes obtinebuntur valores x et y determinantes: atque ſi deinde ponatur $1+\frac{L}{l}+x=s$, inuenietur aequatio pro s eadem, quam ſupra recenſuimus, quamque demonſtrandam ſuſcepimus.

V. Acceleratio corporis H expreſſa per Ho ſeu per $(\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL})\times$G$s$ eſt ad accelerationem eiusdem corporis, abſentibus duobus inferioribus expreſſam per $\frac{1}{l}\times$Gs, vt $\frac{1}{l}-\frac{Mx}{mL}-\frac{\mu x}{mL}$ ad $\frac{1}{l}$, ſeu vt $mL-Mlx-\mu lx$ ad mL. Sequitur inde longitudinem penduli iſochroni eſſe.

$$\frac{mLl}{mL-Mlx-\mu lx}$$

Hanc autem non differre ab illa, quae in parte prima, propoſitione decima tertia data fuit, videbis ſi ibi, prouti factae a nobis denominationes poſtulant, intelligas per x, quod hic per s ſeu per $1+\frac{L}{l}+x$.

VI. Sint iam plura et quotcunque volueris corpora, veluti B, C, D, E, F producantur ſingula fila deſignenturque ſinus angulorum BAN (AN eſt verticalis) CBG, DCH, EDL, FEM per p, q, r, s, t; maſſae autem corporum per ipſas litteras iisdem appoſitas denotentur, Figura 3.

dico posita vi grauitatis naturali = 1, vires acceleratrices corporum secundum suas directiones fore vt sequitur.

$$\text{in B} = p - \frac{C+D+E+F}{B} q,$$
$$\text{in C} = p + q - \frac{D+E+F}{C} r,$$
$$\text{in D} = p + q + r - \frac{E+F}{D} s,$$
$$\text{in E} = p + q + r + s - \frac{F}{E} t,$$
$$\text{in F} = p + q + r + s + t;$$

Veram hanc esse virium acceleratricium legem, percipies si sextum corpus suo filo inferius adhuc appendi ponas, calculumque deinde instituas, vt fecimus ratione trium corporum paragrapho quarto, fingendo scilicet, corpus infimum naturali grauitatis vi verticaliter deorsum accelerari, reliquis interim secundum suam indolem vibratis, idemque corpus mox a contractione fili iterum eleuari: ita enim legem hanc accelerationum nunc expositam a quinque corporibus ad sex, et inde ad septem atque sic quousque libuerit recte continuari videbis.

Ex assumtis autem singulorum angulorum sinibus, deducuntur corporum a linea verticali distantiae, ac si quamuis distantiam vi acceleratrici respondenti proportionalem facias, habebis tot aequationes quot incognitas, sic vt omnia denique desiderata inde recte definiri possint.

VII. Puta nunc corpora esse numero infinita et
Figura 4 aequalia, distantiis minimis et aequalibus a se invicem posita: ideam habebis catenae vniformis ab vna extremitate suspensae, qualis est AC vel AF: In hac elemen-

mentum conſideretur infinite paruum Mm vel Nn, ductis MN et mn ad AC perpendicularibus et mo eidem AC parallela: ponatur Am vel $An = s$ (nec enim differunt quia infinite parum diſtant); mM vel nN $= ds$, quod elementum conſtans aſſumatur: longitudo catenae integrae AF $= l$; $mn = y$; M$o = dy$: erit (poſita vi grauitatis naturali $= 1$) per praecedens theorema vis acceleratrix in m aequalis ſummae omnium ſinuum angulorum contactus, qui ſunt inter A et m, diminutae tertia proportionali corpusculi in m, ſummae omnium corpusculorum in MF et ſinus anguli contactus in M: ſic igitur habetur vis acceleratrix in M $= \int \frac{d\,dy}{ds} - \frac{(l-s)\,d\,dy}{ds^2}$. Quia vero iſochronismus poſtulat, vt vis acceleratrix ſit proportionalis applicatae MN, erit aſſumta n pro conſtante $\int \frac{d\,dy}{ds} - \frac{(l-s)\,d\,dy}{ds^2} = \frac{y}{n}$: ſumatur integrale termini primi ſine additione conſtantis, quia hic nulla ſumenda eſt: ſic fiet $\frac{dy}{ds} - \frac{(l-s)\,ddy}{ds^2} = -\frac{y}{n}$. Denique ponatur $l-s$ ſeu FM aut CN $= x$, et erit $\frac{-dy}{dx} - \frac{x\,ddy}{dx^2} = \frac{y}{n}$, ſiue

$$n\,dy\,dx + n\,x\,d\,dy = -y\,dx^2,$$

quae aequatio denotat naturam curuae AF: quoniam vero integralis eius non apparet, poſui

$$y = \alpha - \beta x - \gamma x x - \delta x^3 - \varepsilon x^4 - \text{etc.},$$
$$dy = -\beta\,dx - 2\gamma x\,dx - 3\delta x x\,dx - 4\varepsilon x^3\,dx - \text{etc.}$$
$$d\,dy = -2\gamma\,dx^2 - 2.3.\delta x\,dx^2 - 3.4.\varepsilon x x\,dx^2 - \text{etc.}$$

Hisque valoribus ſubſtitutis diuiſaque deinde aequatione per dx^2, oritur

$$-\mathfrak{C}-2\gamma x-3\delta xx-4\varepsilon x^3-\text{etc.}$$
$$-2\gamma x-2.3\delta xx-3.4\varepsilon x^3-\text{etc.}=0,$$
$$+\frac{\alpha}{n}-\frac{\mathfrak{C}}{n}x-\frac{\gamma}{n}xx-\frac{\delta}{n}x^3-\text{etc.}$$

cui aequationi satisfit ponendo $\alpha=1$; $\mathfrak{C}=\frac{1}{n}$; $\gamma=\frac{-1}{4nn}$; $\delta=\frac{1}{4.9n^3}$; $\varepsilon=\frac{-1}{4.9.16n^4}$ etc. vnde

$$y=1-\frac{x}{n}+\frac{xx}{4nn}-\frac{x^3}{4.9n^3}+\frac{x^4}{4.9.16n^4}-\text{etc.}$$

vbi per 1 intelligenda est distantia puncti infimi F a verticali: et quia posita $x=l$, est $y=o$ erit simul

$$1-\frac{l}{n}+\frac{ll}{4nn}-\frac{l^3}{4.9n^3}+\frac{l^4}{4.9.16n^4}-\text{etc.}=0;$$

Hinc deriuandus est valor litterae n, qui exprimet longitudinem subtangentis in F. Haec demonstrant veritatem theorematis, quod in praecedente dissertatione octauum est.

VIII. Vt habeatur longitudo penduli isochroni, quaerenda est vis acceleratrix in puncto F, quae per §. VI. erit aequalis summae sinuum omnium angulorum contactus ab A vsque in F, id est $=\int\frac{-ddy}{dx}$ seu $=\frac{-dy}{dx}$; ponendo simul $x=0$; et hinc fit $\frac{-dy}{dx}=\frac{-1}{n}$. Est itaque vis acceleratrix in F ad vim acceleratricem naturalem vt 1 ad n: si vero pendulum simplex longitudinis l habeatur, erit vis acceleratrix in illo $=\frac{1}{l}$ sub eadem distantia à linea verticali; ergo vis acceleratrix in extremitate catenae est ad vim acceleratricem in pendulo simplici eiusdem longitudinis, vt l ad n: Hincque erit longitudo penduli simplicis cum catena simul vibrantis $=n$, vt habet theorema nonum in praemissa dissertatione.

IX.

IX. Theoremata autem decimum et vndecimum vnice pendent à debitae conſtantis additione, eaque proinde ceu nimis nunc facilia hic non attingam: ſed duodecimum ex §. VI rurſus, hunc in modum deducetur.

Corpuscula nunc conſiderentur infinita et aequalibus diſtantiolis à ſe inuicem poſita, ſed inaequalis ponderis: ita habebitur idea catenae pro lubitu inaequaliter craſſae; ſit haec ita formata, vt longitudini FM (x) pondus reſpondeat ξ, denotante ξ functionem qualemcunque ipſius x: Erit (per §. VI.) vis acceleratrix in $M = \int \frac{-ddy}{dx} - \frac{\xi ddy}{d\xi dx} = \frac{y}{n}$, vel quia dx conſtans, erit $\frac{-dy}{dx} - \frac{\xi ddy}{d\xi dx} = \frac{y}{n}$, aut $nd\xi dy + n\xi ddy = -yd\xi dx$, vel denique

$$\frac{-n\xi dy}{dx} = \int y dx,$$

vt fert theorema duodecimum, de quo ſermo erat: demonſtratio magis fiet intelligibilis, ſi ſimul conferatur paragraphus ſeptimus.

DE INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

SEV METHODVS INVENIENDI AEQVATIONES PRO INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

CVruas eiusdem generis hic voco tales curuas, quae a se inuicem non differunt nisi ratione lineae cuiusdam constantis, quae alios atque alios valores assumens eas curuas determinat. Linea haec constans a *Cel. Hermanno* modulus est vocatus, ab aliis parameter: quia autem parametri nomen ambiguitatem creare potest, moduli vocabulum retinebo. Est itaque modulus linea constans et invariabilis, dum vna infinitarum curuarum quaecunque determinatur; varios autem habet valores et ideo variabilis est, si ad diuersas curuas refertur. Sic si in aequatione $y^2 = ax$ sumatur a pro modulo, ex variabilitate ipsius a innumerabiles oriuntur parabolae super eodem axe positae et communem verticem habentes.

§. 2. Infinitae igitur curuae eiusdem generis omnes vnica aequatione exprimuntur, quam modulus qui nobis

nobis semper litera a indicabitur, ingreditur. Huic enim modulo, si successiue alii atque alii valores tribuantur, aequatio continuo alias dabit curuas, quae omnes in vna aequatione continentur. Aequationem hanc modulum continentem cum *Hermanno* modularem vocabimus; in qua igitur praeter alias constantes et eiusdem valoris in omnibus curuis quantitates insunt modulus a et duae variabiles ad curuam quamlibet pertinentes, cuiusmodi sunt vel abscissa et applicata, vel abscissa et arcus curuae, vel area curuae et abscissa etc. prout problema soluendum postulat.

§. 3. Sint igitur quantitates variabiles x et z, quae cum modulo a aequationem modularem ingrediuntur. Perspicuum est, si detur aequatio algebraica inter x et z et a, pro vnica curua, in qua a vt constans consideratur, eandem fore simul modularem, seu ad omnes curuas pertinere, si modo a fiat variabilis. At si inter x et z non poterit aequatio algebraica dari, difficile erit aequationem modularem inuenire. Nam sit $z = \int P dx$, vbi P in a, z et x, quomodocunque detur, seu $dz = P dx$, in qua aequatione a vt constans consideratur; intelligitur aequationem modularem haberi, si integralis aequationis $dz = P dx$ denuo differentietur, posito etiam a variabili. Sed cum integrationem perficere non liceat, eiusmodi methodus desideratur, qua differentialis aequatio, quae prodiret, si integralis denuo differentietur posita etiam a variabili, inueniri possit.

§. 4.

§. 4. Ad conſtruendas quidem et cognoſcendas curuas aequatio $dz = P\,dx$ ſufficit. Nam, dato ipſi modulo a certo valore conſtruetur aequatio $dz = P\,dx$, quo facto habebitur vna curuarum infinitarum, eodemque modo aliae reperientur aliis ponendis valoribus loco a. Sed ſi in his curuis certa puncta debeant aſſignari prout problema aliquod poſtulat, talis aequatio $z = \int P\,dx$ non ſufficit ſed requiritur aequatio a ſignis ſummatoriis libera in qua ſi non eſt algebraica, etiam differentialia ipſius a inſint. Ex data igitur aequatione differentiali pro vnica curua $dz = P\,dx$ in qua a vt conſtans conſideratur, quaeri oportet aequationem differentialem, in qua et a ſit variabilis, haecque erit modularis. Haec vero modularis interdum erit differentialis primi gradus, interdum ſecundi et altioris, interdum etiam penitus non poterit inueniri.

§. 5. Quo igitur methodum tradam, qua ex aequatione differentiali $dz = P\,dx$, in qua a eſt conſtans, modularis poſſit inueniri, quae a vt variabilem contineat; pono primo P eſſe functionem ipſarum a et x tantum, vt $\int P\,dx$ ſaltem per quadraturas exhiberi poſſit. Erit igitur $z = \int P\,dx$, in integratione ipſius $P\,dx$, a pro conſtanti habita. Quaeritur nunc differentiale ipſius $\int P\,dx$ ſi etiam a vt variabilis tractetur; quo inuento ipſique dz aequali poſito habebitur aequatio modularis. Differentiale autem ipſius $\int P\,dx$ habebit hanc formam $P\,dx + Q\,da$, eritque $dz = P\,dx + Q\,da$ aequatio modularis, ſi modo valor ipſius Q eſſet cognitus.

§. 6.

§. 6. Ad inueniendum autem valorem ipſius Q ſequens inieruit theorema. *Quantitas* A *ex duabus variabilibus t et u vtcunque compoſita, ſi differentietur poſito t conſtante, hocque differentiale denuo differentietur poſito u conſtante et t variabili, idem reſultat ac ſi inuerſo ordine* A *primo differentietur poſito u conſtante hocque differentiale denuo differentietur poſito t conſtante et u variabili.* Vt ſit $A = V(t^2 + nu^2)$, differentietur poſito t conſtante, habebitur $\frac{nu\,du}{V(t^2+nu^2)}$. Hoc denuo differentietur poſito u conſtante et prodibit $\frac{-ntu\,dt\,du}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$. Iam ordine inuerſo differentietur $V(t^2 + nu^2)$ poſito u conſtante, eritque differentiale $\frac{t\,dt}{V(t^2+nu^2)}$, quod denuo differentiatum poſito t conſtante dabit $\frac{-ntu\,dt\,du}{(t^2+nu^2)^{\frac{3}{2}}}$, id quod congruit cum prius inuento. Atque ſimilis conuenientia in quibusque aliis exemplis cernetur.

§. 7. Quamuis autem huius theorematis veritatem exercitati facile perſpiciant, demonſtrationem tamen ſequentem adiiciam ex ipſius differentiationis natura petitam. Cum A ſit functio ipſarum t et u, abeat A in B ſi loco t ponatur $t + dt$; at poſito $u + du$ loco u abeat A in C. Poſito autem ſimul $t + dt$ loco t et $u + du$ loco u mutetur A in D. Ex his perſpicuum eſt, ſi in B ſcribatur $u + du$ loco u prouenire D; ſimilique modo ſi in C ponatur $t + dt$ loco t proditurum quoque D. His praemiſſis, ſi differentietur A poſito t conſtante prodibit C − A, nam poſito $u + du$ loco u abit A in C,

differentiale autem est $C-A$. Si porro in $C-A$ ponatur $t+dt$ loco t prodibit $D-B$, quare differentiale erit $D-B-C+A$. Inuerso nunc ordine posito $t+dt$ loco t in A habebitur B, eritque differentiale ipsius A posito tantum t variabili $B-A$. Hoc differentiale posito $u+du$ loco u abit in $D-C$, quare eius differentiale erit $D-B-C+A$, id quod congruit cum differentiali priori operatione inuento. Q. E. D.

§. 8. Istud autem theorema hoc modo inseruit ad valorem ipsius Q inueniendum. Cum P et Q sint functiones ipsarum a et x, sit $dP=Adx+Bda$ et $dQ=Cdx+Dda$, atque z cum sit $=\int P dx$, erit quoque functio ipsarum a et x, positum autem est $dz=Pdx+Qda$. Iam secundum Theorema differentietur z posito x constante, eritque differentiale Qda hoc porro differentiatum posito a constante dabit $Cdadx$. Altera operatione differentiale ipsius z posito primo a constante est Pdx, huius vero differentiale posito x constante est $Bdadx$. Quare vi theorematis aequalia esse debent $Cdadx$ et $Bdadx$, ex quo fit $C=B$. Datur autem B ex P; differentiale enim ipsius P posito x constante diuisum per da dat B. Cum igitur sit $dQ=Bdx+Dda$, erit $Q=\int Bdx$, si in hac integratione a vt constans consideretur.

§. 9. Ex his ergo habebitur $dz=Pdx+da\int Bdx$, existente $dP=Adx+Bda$. Si igitur Bdx integrari poterit, desiderata habebitur aequatio modularis. At si integrari non potest aeque inutilis est haec aequatio ac prima

prima $z = \int P\,dx$, vtraque enim inuoluit integrationem differentialis, in qua a vt conſtans debet conſiderari, id quod eſt contra naturam aequationis modularis, quippe in qua a aeque variabile eſſe debet ac x et z.

§. 10. Quando autem $B\,dx$ integrationem non admittit: non tamen aequatio inuenta vt inutilis omnino eſt negligenda. Nam ſi integratio ipſius $B\,dx$ pendeat a $\int P\,dx$ aequatio modularis poterit exhiberi. Si enim fuerit $\int B\,dx = a\int P\,dx + K$ exiſtente K functione ipſarum a et x algebraica, erit ob $\int P\,dx = z$, $\int B\,dx = az + K$ et $dz = P\,dx + a\,z\,da + K\,da$, quae aequatio reuera erit modularis. Quoties igitur $B\,dx$ vel reipſa poterit integrari, vel ad integrationem ipſius $P\,dx$ deduci, aequatio habebitur modularis, quae erit differentialis primi gradus. At ſi $P\,dx$ eſt integrabile, ne hoc quidem opus eſt: ſed $z = \int P\,dx$ erit ſimul aequatio modularis.

§. 11. Si autem $\int B\,dx$ neque algebraice exhiberi neque ad $\int P\,dx$ reduci poteſt, diſpiciendum eſt, num $\int B\,dx$ ad integrationem alius differentialis, in qua a non ineſt, poſſit reduci. Tale enim integrale in qua a non ineſt non turbat aequationem modularem, cum ſi libuerit per differentiationem tolli poſſit. Atque eodem iure, ſi $\int P\,dx$ reduci poterit ad aliud integrale, quod a non continet, nequidem hac ipſius Q determinatione opus eſt, ſed $z = \int P\,dx$ ſtatim dat aequationem modularem, vt ſi ſit $\int P\,dx = b\int K\,dx$ data b per a et K per x tantum, erit aequatio modularis $z = b\int K\,dx$ ſeu $dz = \frac{z\,db}{b} + K\,b\,dx$.

§. 12. Si autem haec omnia nullum inueniant locum indicio est, aequationem modularem primi gradus differentialem non dari. Quamobrem in altioris gradus differentialibus quaeri debebit. Ad hoc differentio denuo aequationem $dz = P\,dx + da\int B\,dx$. Pono autem $dB = E\,dx + F\,da$, quo facto erit ipsius $\int B\,dx$ differentiale $B\,dx + da\int F\,dx$. Differentiatione igitur peracta et loco $\int B\,dx$ eius valore ex eadem aequatione nempe $\frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ posito, habebitur $ddz = P\,ddx + dP\,dx + \frac{dz\,da}{da} - \frac{P\,dx\,da\,da}{da} + B\,da\,dx + da^2\int F\,dx$. Erit igitur $\int F\,dx = \frac{d\,dz}{da^2} - \frac{dz\,da}{da^3} - \frac{P\,dx}{da^2} - \frac{dP\,dx}{da^2} + \frac{P\,dx\,da}{da^3} - \frac{B\,dx}{da}$ Cum autem sit $\int B\,dx = \frac{dz}{da} - \frac{P\,dx}{da}$ et $\int P\,dx = z$, si $\int F\,dx$ reduci poterit ad integralia $\int B\,dx$ et $\int P\,dx$ vel si reipsa poterit integrari, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Vt si fuerit $\int F\,dx = \alpha\int B\,dx + \mathfrak{G}\int P\,dx + K$, datis α et $\mathfrak{G}$ vtcunque per a et constantes, et K per a et x constantes, erit aequatio modularis haec $\frac{d\,dz - dz\,da}{da^3} - \frac{P\,dx\,da\,da + P\,dx\,dx\,da - dP\,da\,dx}{da^3} - \frac{B\,dx}{da} = \frac{\alpha\,dz - \alpha P\,dx}{da} + \mathfrak{G}z + K$. At B et F ex dato P facile reperiuntur.

§. 13. Si $\int F\,dx$ quod autem rarissime euenit vel non amplius in se contineat a, vel ad aliud possit reduci, in quo a non insit, aequatio inuenta differentialis secundi gradus pro legitima modulari poterit haberi. Sed si haec omnia nondum succedant, adhuc differentiatio est instituenda, in qua differentiale ipsius $\int F\,dx$ erit $F\,dx + da\int H\,dx$ posito $dF = G\,dx + H\,da$. Quo facto videndum est vel an $\int H\,dx$ re ipsa possit exhibe-

ri, vel an pendeat a praecedentibus $\int F dx$, $\int B dx$ et $\int P dx$, vel an possit ex signo summatorio a eliminari. Quorum si quod obtigerit, habebitur aequatio modularis differentialis tertii gradus; sin vero nullum locum habuerit, continuanda est differentiatio simili modo donec signa summatoria potuerint eliminari.

§. 14. His generalibus praemissis ad specialia accedo, casus euoluturus, quibus functio P quodammodo determinatur. Sit igitur P functio ipsius x tantum, a prorsus non inuoluens, quam littera X designabo, erit ergo $dz = X dx$, quae quidem aequatio quia non continet a, ad vnicam videtur curuam pertinere, neque ad modularem praebendam apta esse. Sed cum in integratione constantem addere liceat, poterit esse $z = \int X dx + na$ seu differentiando $dz = X dx + n da$, quae est vera aequatio modularis. Eadem aequatio prodiisset, si iuxta regulam X differentiassem posito x constante, vnde prodit $B = 0$ et $\int B dx = n$ constanti, orta igitur esset aequatio modularis $dz = X dx + n da$ cuius loco potius integralis $z = \int X dx + na$ vsurpatur.

§. 15. Sit nunc $P = AX$, existente A functione ipsius a, et X ipsius x tantum. Cum igitur sit $z = \int P dx$ erit $z = \int AX dx$ seu quia in integratione a vt constans debet considerari, $z = A \int X dx$. Quae aequatio seu eius differentialis $A dz - z dA = A^2 X dx$ erit aequatio modularis quaesita. Loco A quidem cum sit functio ipsius a tantum, poni potest ipse modulus a: nam loco moduli eius functio quaecunque eodem iure pro modulo haberi potest.

§. 16. Sit $P = A + X$ litteris A et X eosdem vt ante retinentibus valores. Erit ergo $dz = A\,dx + X\,dx$ atque $z = Ax + \int X\,dx$, quae aequatio iam est modularis; quia modulus A non est in signo summatorio inuolutus. Si quem autem $\int X\,dx$ offendat, differentialem aequationem $dz = A\,dx + x\,dA + X\,dx$ pro modulari habere potest.

§ 17. Simili ratione modularem aequationem inuenire licet, si fuerit $P = AX + BY + CZ$ etc. vbi A, B, C sunt functiones quaecunque ipsius moduli a, et X, Y, Z functiones quaecunque ipsius x et constantium excepta a. Namque ob $dz = AX\,dx + BY\,dx + CZ\,dx$ erit $z = A\int X\,dx + B\int Y\,dx + C\int Z\,dx$, quae simul est modularis, cum modulus a nusquam post signum summatorium reperiatur.

§. 18. Sit $P = (A + X)^n$ seu $z = \int dz\,(A + X)^n$. Differentiale ipsius P posito x constante est $n(A+X)^{n-1}dA$ id quod per da diuisum dat superiorem valorem B vid. §. 8. Erit igitur $dz = (A+X)^n dx + n dA \int (A+X)^{n-1} dx$ seu $\int dx\,(A+X)^{n-1} = \frac{dz - (A+X)^n dx}{n\,dA}$. Cum igitur sit $\int dx\,(A+X)^n = z$, si haec duo integralia a se inuicem pendeant, vel $\int dx\,(A+X)^{n-1}$ algebraice etiam exprimi poterit, habebitur quod quaeritur. Si neutrum contingat denuo differentiatio est instituenda. Est autem differentiale ipsius $\int dx\,(A+X)^{n-1} = dx\,(A+X)^{n-1} + (n-1)\,dA \int (A+X)^{n-2} dx = \text{Diff.} \frac{dz - (A+X)^n dx}{n\,dA}$.

Erit

Erit itaque $\int dx(A+X)^{n-2} = \frac{1}{(n-1)dA}\text{Diff.}\frac{dz-(A+X)^n dx}{ndA} - \frac{dx(A+X)^{n-1}}{(n-1)dA}$. Quare videndum eſt an $\int dx(A+X)^{n-2}$ poſſit vel integrari vel ad priora integralia reduci.

§. 19. Si n fuerit numerus integer affirmatiuus aequatio modularis erit algebraica. Nam $(A+X)^n$ poteſt in terminos numero finitos reſolui, quorum quisque in dx ductus integrari poteſt, ita vt modulus α in ſignum ſummatorium non ingrediatur. Erit autem aequatio modularis haec $z = A^n x + \frac{n}{1}A^{n-1}\int X dx + \frac{n.n-1}{1.2}A^{n-2}\int X^2 dx$ etc. Examinandum igitur reſtat quibus caſibus ſi n non fuerit numerus integer affirmatiuus, ſupra memoratae conditiones locum habeant.

§. 20. Sit primo $X = bx^m$, vbi b etiam ab a pendere poteſt; erit ergo $x = \int (A+bx^m)^n dx$. Haec formula primo ipſa eſt integrabilis, ſi $m = \frac{i}{1}$ deſignante i numerum quemcunque affirmatiuum integrum: deinde etiam ſi $m = \frac{-1}{n+i}$. His igitur caſibus aequatio modularis fit algebraica. At ſi $m = -\frac{1}{n}$, vbi b ab a non pendere poteſt illa quidem aequatio integrationem non admittit ſed ſequens $dz = (A+bx^{\frac{-1}{n}})^n dx + ndA\int dx(A+bx^{\frac{-1}{n}})^{n-1}$ euadit integrabilis, ſitque aequatio modularis differentialis primi caſus.

§. 21. Non ſolum autem, quicunque valor ipſi m tribuatur aequatio modularis differentialis primi gradus haberi poteſt, ſed etiam ſi fuerit $z = \int x^m dx(A+bx^k)_n$. Fiet enim $dz = x^m dx(A+bx^k)^n + ndA\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$

Sed

Sed eſt $\int x^m dx(A+bx^k)^n = \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{m+nk+1} + \frac{nkA}{m+nk+1} \int x^m dx(A+bx^k)^{n-1}$, ſeu $\int x^m dx(A+bx^k)^{n-1} = \frac{(m+nk+1)z}{nkA} - \frac{x^{m+1}(A+bx^k)^n}{nkA}$. Conſequenter habebitur aequatio modularis haec $Akdz = (A+bx^k)^n (Akx^m dx - x^{m+1} dA) + (m+nk+1) z dA$. Simili modo modularis eſſet inuenta, ſi fuiſſet $z = B\int x^m dx (A+bx^k)^n$ alia enim non prodiiſſet differentia niſi quod loco z ſcribi debuiſſet $\frac{z}{B}$, et loco dz, $\frac{Bdz - zdB}{B^2}$ ſi quidem B ab a etiam pendeat.

§. 22. Miſſis autem huiusmodi litterae P determinationibus, quippe quae minus late patent, ad alias accedo, quae multo ſaepius vſui eſſe poſſunt. Continentur hae determinationes ea functionis cuiusdam propoſitae proprietate, qua functio eundem vbique tenet dimenſionum quantitatum variabilium numerum. Tales enim functiones peculiari modo differentiationem admittunt. Vt ſit u functio nullius dimenſionis ipſarum a et x, cuiusmodi ſunt $\frac{a}{x}$, $\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{a}$ aliaeque ſimiles, in quibus ipſarum a et x dimenſionum numerus in denominatore aequalis eſt numero dimenſionum numeratoris. Det autem talis functio u differentiata $Rdx + Sda$; dico fore $Rx + Sa = 0$. Nam ſi in functione u ponatur $x = ay$, omnia a ſeſe deſtruent et in ea praeter y et conſtantes nulla alia littera remanebit. Hancobrem in differentiali poſt hanc ſubſtitutionem aliud differentiale praeter dy non reperietur. Cum autem ſit $x = ay$ erit

erit $dx = a\,dv + y\,da$, ideoque $du = R\,a\,dy + R\,y\,da + S\,da$ Debebit ergo esse $R\,y + S = o$, *seu* $R\,x + S\,a = o$.

§. 23. Sin vero fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x, atque $du = R\,dx + S\,da$; *erit* $\frac{u}{x^m}$ functio ipsarum a et x nullius dimensionis. Differentietur igitur $\frac{u}{x^m}$ et prodibit $\frac{x\,du - m\,u\,dx}{x^{m+1}}$ seu $\frac{R\,x\,dx - m\,u\,dx + S\,x\,da}{x^{m+1}}$. Quod cum sit differentiale functionis nullius dimensionis erit $R\,x^2 - m\,u\,x + S\,a\,x = o$, seu $R\,x + S\,a = m\,u$. Quare si fuerit u functio m dimensionum ipsarum a et x; atque ponatur $du = R\,dx + S\,da$ erit $R\,x + S\,a = m\,u$ ideoque $du = R\,dx + \frac{da}{a}(m\,u - R\,x)$ seu $a\,du = R\,a\,dx - R\,x\,da + m\,u\,da$.

§. 24. His praemissis in $dz = P\,dx$ seu $z = \int P\,dx$ sit P functio n dimensionum ipsarum a et x, erit igitur z talis functio dimensionum $n+1$. Quare si ponatur $dz = P\,dx + Q\,da$, erit $P\,x + Q\,a = (n+1)\,z$. Ex quo valor ipsius Q substitutus dabit aequationem modularem $dz = P\,dx + \frac{da}{a}((n+1)\,z - P\,x)$ seu $a\,dz - (n+1)\,z\,da = P\,a\,dx - P\,x\,da$. Quae tantum est differentialis primi gradus Cum autem generaliter erat $Q = \int B\,dx$, erit hoc casu $(n+1)\int P\,dx = a\int B\,dx + P\,x$. Ex quo perspicitur hoc casu integrale $\int B\,dx$ semper reduci ad $\int P\,dx$.

§. 25. Eadem aequatio modularis proueniet ex consideratione solius P. Posito enim $dP = A\,dx + B\,da$, erit $n\,P = A\,x + B\,a$. Cum autem sit $dz = P\,dx + da$

$\int B\,dx$, erit $dz = P\,dx + \frac{da}{a}\int(nP\,dx - Ax\,dx)$ in qua integratione a conſtans habetur. Erit igitur $\int nP\,dx = nz$, et $\int Ax\,dx = Px - \int P\,dx$ ob $\int A\,dx = P$. Habebitur itaque $dz = P\,dx + \frac{da}{a}(n+1)z - Px)$, id quod prorſus congruit cum praecedentibus.

§. 26. Retinente P ſuum valorem n dimenſionum. Sit $z = \int APX\,dx$, vbi A ſit functio ipſius a et X ipſius x tantum. Erit igitur $\frac{z}{A} = \int PX\,dx$. Poſito $dP = A\,dx + B\,da$, (in quo littera A cum altera quae eſt functio ipſius a tantum non eſt confundenda) erit $nP = Ax + Ba$. Ipſius PX differentiale igitur poſito x conſtante erit $BX\,da$. Conſequenter habebitur d. $\frac{z}{A} = PX\,dx + da\int BX\,dx = PX\,dx + \frac{da}{a}\int(nPX\,dx - AXx\,dx)$. Eſt vero $\int nPX\,dx = \frac{nz}{A}$ et $\int AXx\,dx = PXx - \int PX\,dx - \int Px\,dX$. Quare fiet d. $\frac{z}{A} = PX\,dx - \frac{PXx\,da}{a} + \frac{(n+1)z\,da}{Aa} + \frac{da}{a}\int Px\,dX$. Niſi igitur $\int Px\,dX$ reduci poterit ad $\int PX\,dx$ vel prorſus integrari, aequatio modularis differentialis primi gradus dari nequit.

§. 27. At ſi fuerit $z = R\int P\,dx$, exiſtente R functione quacunque algebraica ex a, x et etiam ex z conſtante, at P functione ipſarum a et x dimenſionum n. Quia eſt $\frac{z}{R} = \int P\,dx$ erit d. $\frac{z}{R} = P\,dx + \frac{da}{a}(\frac{(n+1)z}{R} - Px) = \frac{R\,dz - z\,dR}{R^2}$ ſeu $R\,a\,dz - z\,a\,dR - (n+1)R\,z\,da = PR^2\,a\,dx - PR^2\,x\,da$. In vniverſum autem teneatur, quoties $z = \int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci poſſit, toties etiam $z = R\int P\,dx$ ad aequationem modularem reduci poſſe. Nullum aliud enim diſcrimen aderit,

rit, nisi quod in illo casu erat z, hoc casu debeat esse $\frac{z}{R}$. Quare si R fuerit vel quantitas algebraica, vel talis transcendens, vt eius differentiale posito etiam a variabili possit sine summatione exhiberi, aequatio modularis per praecepta data reperietur. Quamobrem in posterum tales casus, etiamsi latius pateant praetermittere licebit.

§. 28. Ponamus esse $z = \int (P+Q)dx$, seu $z = \int P dx + \int Q dx$ et P esse functionem ipsarum a et x dimensionum $n-1$, Q vero functionem earundem a et x dimensionum $m-1$. Cum igitur differentiale ipsius $\int P dx$ sit $\frac{P(adx-xda)}{a} + \frac{da}{a}\int nP\,dx$ et differentiale ipsius $\int Q dx$ sit $\frac{Q(adx-xda)}{a} + \frac{da}{a}\int mQ\,dx$; erit $dz = \frac{(P+Q)(adx-xda)}{a} + \frac{da}{a}(n\int P\,dx + m\int Q\,dx)$. Ponatur $\frac{adz-(P+Q)(adx-xda)}{da} = u$, eritque $u = n\int P\,dx + m\int Q\,dx$. Si igitur porro differentietur erit $du = \frac{(nP+mQ)(adx-xda)}{da} + \frac{da}{a}(n^2\int P\,dx + m^2 \int Q\,dx)$. Posito igitur $\frac{adv-(nP+mQ)(adx-xda)}{da} = t$ erit $t = n^2\int P\,dx + m^2\int Q\,dx$. Eliminatis nunc ex his tribus aequationibus ipsarum z, u et t integralibus $\int P\,dx$ et $\int Q\,dx$, prodibit haec aequatio $mnz-(m+n)u+t=o$. Quae aequatio, si loco u et t valores assumti substituantur, erit modularis quaesita.

§. 29. Simili modo si fuerit $z = \int (P+Q+R)dx$ et P functio $n-1$, Q functio $m-1$ et R functio $k-1$ dimensionum ipsarum a et x. Ponatur $u = \frac{adz-(P+Q+R)(adx-xda)}{da}$ et $t = \frac{adu-(nP+mQ+kR)(adx-xda)}{da}$, et $s = \frac{adt-(n^2P+m^2Q+k^2R)(adx-xda)}{da}$

Quo facto erit aequatio modularis haec: $kmnz-(km+kn+mn)u+(k+m+n)t-s=o$.

§. 30. Sit porro $z=\int(P+Q)^k dx$, vbi P sit functio n dimensionum, Q vero functio m dimensionum ipsarum a et x. Quando igitur est $dP=A\,dx+B\,da$ et $dQ=C\,dx+D\,da$, erit $nP=Ax+Ba$ et $mQ=Cx+Da$. Differentiale autem ipsius $(P+Q)^k$ posito x constante diuisum per da est $k(B+D)(P+Q)^{k-1}$. Hanc ob rem erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{k\,da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(Ba+Da)\,dx$. Cum autem sit $Ba=nP-Ax$ et $Da=mQ-Cx$, et $A\,dx=dP$ et $C\,dx=dQ$ ob a in hac integratione constans, erit $dz=(P+Q)^k dx+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}(nP\,dx+mQ\,dx-x\,dP-x\,dQ)$, seu $dz=\frac{(P+Q)^k(a\,dx-x\,da)}{a}+\frac{da}{a}\int(P+Q)^{k-1}((nk+1)P\,dx+(mk+1)Q\,dx)$. Ponatur $\frac{a\,dz-(P+Q)^k(a\,dx-x\,da)-z\,da}{k\,da}=u$ erit $u=\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$. Quare si integrale $\int(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}$ pendet ab integrali $\int(P+Q)^k dx$ habebitur aequatio modularis differentialis gradus primi; sin minus differentiatio est continuanda. Fit autem $du=(nP\,dx+mQ\,dx)(P+Q)^{k-1}+\frac{u\,da}{a}-\frac{da}{a}(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}x+\frac{da}{a}\int(kn^2P^2\,dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q\,dx)\int(P+Q)^{k-2}$. Et posito $t=\frac{a\,du-u\,da-(nP+mQ)(P+Q)^{k-1}(a\,dx-x\,da)}{da}$ erit $t=\int(kn^2P^2\,dx+(2kmn+n^2-2mn+m^2)PQ\,dx+km^2Q^2\,dx)(P+Q)^{k-2}$.

§. 31.

§. 31. Cum igitur habeantur tria integralia videndum eſt, num ea a ſe inuicem pendeant, hoc enim ſi fuerit, habebitur aequatio algebraica inter t, u et z, quae dabit loco t et u ſubſtitutis aſſumtis valoribus aequationem modularem differentialem ſecundi gradus. Quo autem facilius in caſibus particularibus perſpici poſſit, an pendeant a ſe inuicem, ad alias formas eas reduci conuenit. Cum igitur ſit $z = \int (P+Q)^k dx$ erit $u = mz + (n-m)\int (P+Q)^{k-1} P\,dx$ et $t = (2km + n - m)u - (km^2 - m^2 + mn)z + (n-m)^2 (k-1) \int (P + Q)^{k-2} P^2\,dx$ Quaerendum itaque eſt an $\int (P+Q)^{k-2} P^2 dx$ reduci poſſit ad haec $\int (P+Q)^{k-1} P\,dx$ et $\int (P+Q)^k dx$ Vel an ſit $\int (P+Q)^{k-2} P^2\,dx = \alpha \int (P+Q)^{k-1} P\,dx + \mathfrak{G} \int (P+Q)^k dx + V$ deſignante V quantitatem algebraicam quamcunque per a et x datam, et α ac $\mathfrak{G}$ ſunt coefficientes ex conſtantiſſimis et a compoſitae.

§ 32. Fiat igitur $V = T(P+Q)^{k-1}$ huius differentiale poſito a conſtante ſit $dT(P+Q)^{k-1} + (k-1)(T\,dP + T\,dQ)(P+Q)^{k-2}$. Prodibit ergo ſequens aequatio $P^2 dx = \alpha P^2 dx + \alpha PQ\,dx + \mathfrak{G} P^2 dx + 2\mathfrak{G} PQ\,dx + \mathfrak{G} Q^2 dx + P\,dT + Q\,dT + (k-1) T\,dP + (k-1) T\,dQ$, quae per dx diuidi poterit. At T ita debet accipi, vt termini repondentes ſeſe deſtruant, ſumtis ad hoc idoneis pro α et $\mathfrak{G}$ valoribus.

§. 33. At ſi per $\int P\,dx$ non abſolute determinetur z ſed quantitas $\int Q\,dz$, data Q vtcunque per a et z, atque P per a et x; habebitur iſta aequatio $Q\,dz = P\,dx$ in qua indeterminatae x et z ſunt a ſe inuicem

ſeparatae. Modularis vero aequatio hoc modo inuenietur: Quia eſt $\int Q\,dz = \int P\,dx$ differentietur vtrumque membrum ponendo etiam a variabili ope $dP = A\,dx + B\,da$ et $dQ = C\,dz + D\,da$. Erit ergo $Q\,dz + da\int D\,dz = P\,dx + da\int B\,dx$ ſeu $Q\,dz = P\,dx + da\,(\int B\,dx - \int D\,dz)$. Quae aequatio, ſi $\int B\,dx$ et $\int D\,dz$ poterunt eliminari, dabit modularem quaeſitam.

§. 34. Sit P functio $^{m-1}$ dimenſionum ipſarum a et x, et Q functio $^{n-1}$ dimenſionum ipſarum a et z. His poſitis erit Diff. $\int P\,dx = \frac{m\int a P\,dx + P(a\,dx - x\,da)}{a}$, et Diff. $\int Q\,dz = \frac{n\,da\int Q\,dz + Q(a\,dz - z\,da)}{a}$. Ex quo eruitur iſta aequatio $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da)}{da} - \frac{P(a\,dx - x\,da)}{da}$ ob $\int P\,dx = \int Q\,dz$. Quare ſi fuerit $m = n$, erit $Q\,a\,dz - Q\,z\,da = P\,a\,dx - P\,x\,da$. quae eſt aequatio modularis, ſeu $\frac{da}{a} = \frac{Q\,dz - P\,dx}{Qz - Px}$.

§. 35. Sin vero m et n non ſint aequales, aequatio modularis erit differentialis ſecundi gradus. Nam cum ſit $(m-n)\int P\,dx = \frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da}$ erit Diff. $\frac{Q(a\,dz - z\,da) - P(a\,dx - x\,da)}{da} = \frac{m(m-n)\,da\int P\,dx}{a} + \frac{(m-n)P(a\,dx - x\,da)}{a} = \frac{mQ(a\,dz - z\,da) - nP(a\,dx - x\,da)}{a}$. Quae aequatio eſt modularis quaeſita.

§. 36. Si in aequatione propoſita $dz + P\,dx = 0$ indeterminatae non fuerint a ſe inuicem ſeparatae, ita vt P ſit functio involuens x et z et a; debebit per quantitatem quandam R multiplicari, quo formula $R\,dz + PR\,dx$ vt differentiale integralis cuiusdam S poſſit conſiderari. Erit itaque $dS = R\,dz + PR\,dx = 0$, ideoque

ideoque $S = \text{Conſt.}$ Sed ad quantitatem R inueniendam, ſit $dP = A\,dx + B\,dz$ et $dR = D\,dx + E\,dz$, vbi a tantisper pro conſtante habemus. His poſitis erit $d.PR = (DP + AR)\,dx + (EP + BR)\,dz$, quocirca debet eſſe $D = EP + BR$. At ob $D = \frac{dR - E\,dz}{dx}$ fiet $E\,dz + EP\,dx + BR\,dx = dR$. Cum vero ſit $dz + P\,dx = o$, habebitur $dR = BR\,dx$, et $lR = \int B\,dx$. Cognita vero eſt B ex dato P, et quia B et z et x inuoluit, $B\,dx$ integrari debet ope aequationis $dz + P\,dx = o$, ſi quidem fieri poteſt. Sit itaque $\int B\,dx = K$, eritque $R = e^K$ poſito $le = 1$.

§. 37. Cum igitur ſit $dS = e^K\,dz + e^K P\,dx = o$, ad aequationem modularem inueniendam ſit $dK = F\,dx + G\,dz + H\,da$, eritque $de^K = e^K(F\,dx + G\,dz + H\,da)$. Sumatur deinde integrale ipſius $e^K H\,dz$ poſito tantum z variabili, x vero et a conſtantibus, quo facto erit aequatio modularis $e^K\,dz + e^K P\,dx + da\int e^K H\,dz = o$, ſeu diuiſo per e^K haec $dz + P\,dx + e^{-K}\,da\int e^K H\,dz = o$. Alia aequatio modularis inuenitur, poſito $dP = A\,dx + B\,dz + C\,da$, erit enim ipſius $e^K P$ differentiale poſito x et z conſtante hoc $e^K(C\,da + PH\,da)$. Integretur $e^K\,dx(C + PH)$ poſito tantum x variabili, quo facto erit aequatio modularis $dz + P\,dx + e^{-K}\,da\int e^K\,dx(C + PH) = o$. Sed huiusmodi aequationes modulares niſi R poſſit ſine aequatione propoſita $dz + P\,dx = o$ determinari, nullius fere ſunt vſus.

§. 38. Conſideremus igitur caſus particulares, ſitque in aequatione $dz + P\,dx = o$, P functio nullius dimenſionis

sionis ipsarum x et z, non computatis constantibus et modulo a. Formula vero $dz+Pdx$ integrabilis semper redditur si dividatur per $z+Px$, quamobrem erit $S=\int\frac{dz+Pdx}{z+Px}=$ Const. Fit autem $\int\frac{dz+Pdx}{z+Px}=l(z+Px)-\int\frac{xdP}{z+Px}$. Deinde posito $z=tx$, fiet P functio ipsius t tantum quae sit T. Quare erit $S=l(z+Px)-\int\frac{dT}{t+T}$ quod per quadraturas potest exhiberi.

§. 39. Ad aequationem modularem igitur inueniendam nil aliud est agendum, nisi vt $\int\frac{dz+Pdx}{z+Px}$ differentietur posito quoque modulo a variabili. Ponatur igitur $dP=Adx+Bdz+Cda$, vbi erit $Ax+Bz=0$. Differentietur nunc coefficiens ipsius dx, nempe $\frac{P}{z+Px}$ posito tantum a variabili, erit eius differentiale $\frac{Czda}{(z+Px)^2}$. Deinde integretur $\frac{Czdx}{(z+Px)^2}$ tantum x pro variabili habita, quo facto erit aequatio modularis quaesita $dz+Pdx+(z+Px)da\int\frac{Czdx}{(z+Px)^2}=0$. Simili modo ex coefficiente ipsius dz qui est $\frac{1}{z+Px}$ prodit haec aequatio modularis $dz+Pdx-(z+Px)da\int\frac{Cxdz}{(z+Px)^2}=0$, in qua integratione z tantum pro variabili habetur. Siue etiam haec $dz+Pdx=(z+Px)da\int\frac{Ddt}{(t+T)^2}$ in qua C et T per solum t et a dantur.

§. 40. Praetermittere hic non possum, quin generalem aequationum homogenearum, vti a *Cel. Ioh Bernoulli* vocantur, quae omnes hac aequatione $dz+Pdx=0$ continentur, resolutionem adiiciam. Namque reperitur ex (§. 38) $l(z+Px)=\int\frac{dT}{t+T}=l(t+T)-\int\frac{dt}{t+T}$ vbi $=\frac{z}{x}$ et $T=P$. Prodibit igitur. $lx+\int\frac{dt}{t+T}=0$ seu adiecta

iecta constante $l\frac{c}{x}=\int\frac{dt}{t+T}$. Vt si proposita sit aequatio $nxdz+dx\sqrt{(x^2+z^2)}=o$ fiet $P=\frac{\sqrt{(x^2+z^2)}}{nx}$, positoque $z=tx$, erit $T=\frac{(1+tt)}{n}$ ideoque $l\frac{c}{x}=\int\frac{ndt}{nt+\sqrt{(1+tt)}}$ fiat $\sqrt{(1+tt)}=t+s$ erit $t=\frac{1-ss}{2s}$ et $dt=\frac{-(1+ss)}{2ss}$. Quare erit $l\frac{c}{x}=\int\frac{-nds(1+ss)}{(n+1)s-(n-1)s^3}=\frac{-n}{n+1}ls+\frac{n^2}{n^2-1}l((n-1)s^2-n-1)$.

§. 41. Quo tamen vsus calculi §. 36 in casu speciali appareat, sit aequatio proposita $dz+pzdx-qdx=o$, in qua p et q vtcunque in x et x dantur. Quae aequatio cum illa generali $dz+Pdx=o$ collata dat $P=pz-q$, ex quo fiet $B=p$, et $lR=\int pdx$ seu $R=e^{\int pdx}$. Cum igitur $\int pdx$ per quadraturas possit assignari, cognitus est valor ipsius R, ideoque aequatio proposita per $e^{\int pdx}$ multiplicata fit integrabilis: erit igitur $e^{\int pdx}dz+e^{\int pdx}pzdx-e^{\int pdx}qdx=o$ huiusque integralis $e^{\int pdx}z=\int e^{\int pdx}qdx$ seu $z=e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx}qdx$. Differentiari itaque debet $e^{-\int pdx}\int e^{\int pdx}qdx$ positis et a et x variabilibus, et differentiale ipsi dz aequale poni, quo facto habebitur aequatio modularis. Positis igitur $dp=fdx+gda$ et $dq=hdx+ida$ prodibit ista aequatio modularis $dz=-e^{-\int pdx}(pdx+da\int gdx)\int e^{\int pdx}qdx+qdx+e^{-\int pdx}da\int e^{\int pdx}(idx+qdx\int gdx)$, seu posito breuitatis gratia $\int e^{\int pdx}qdx=T$ erit $dz=-e^{-\int pdx}Tpdx+qdx+e^{-\int pdx}da\int e^{\int pdx}idx-e^{-\int pdx}da\int Tgdx$. Ex qua operatione intelligi potest, ad aequationem modularem inueniendam id maxime esse efficiendum, vt in aequatione proposita indeterminatae x se inuicem separentur.

ADDITAMENTVM
AD DISSERTATIONEM DE INFINITIS CVRVIS EIVSDEM GENERIS.

AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

IN ſuperiore diſſertatione, in qua methodum tradidi aequationem pro infinitis curuis eiusdem generis inueniendi, ipſius Q valorem in aequatione $dz = P\,dx + Q\,da$ determinare docui, ex data aequatione $z = \int P\,dx$. Namque ſi P ex x, et a cum conſtantibus vtcunque fuerit compoſitum; manifeſtum eſt ſi $\int P\,dx$ differentietur poſito non ſolum x ſed etiam a variabili, prodituram eſſe huius formae aequationem $dz = P\,dx + Q\,da$, in qua valor ipſius Q neceſſario a quantitate P, quae eſt cognita, pendebit. Demonſtraui ſcilicet, ſi differentiale ipſius P poſito x conſtante fuerit $B\,da$, fore ipſius Q differentiale poſito a conſtante, $B\,dx$, ex quo pendentia ipſius Q a P ſatis perſpicitur.

§. 2. Cum autem inuentus fuerit valor ipſius Q, aequatio $dz = P\,dx + Q\,da$ exprimet naturam infinitarum curuarum ordinatim datarum, quarum ſingulae ſeorſim continentur aequatione $dz = P\,dx$, a ſe inuicem vero diffe-

diffe-

differunt diuersitate parametri seu moduli a. Et hanc ob rem aequationem $dz = P\,dx + Q\,da$ in qua modulus a tanquam quantitas variabilis ineſt, cum *Cel. Hermanno* aequationem modularem vocaui.

§. 3 Si $P\,dx$ integrationem admittit, seu si curuae ordinatim datae omnes sunt algebraicae aequatio $z = \int P\,dx$ simul erit modularis; nam quia nulla adsunt differentialia, modulus a aeque variabilis ac x et z poterit considerari Sin autem $P\,dx$ integrari nequit, aequatio etiam modularis non erit algebraica, exceptis casibus quibus est $P = AX + BY + CZ$ etc. existentibus A, B, C etc. functionibus ipsius a et constantium, atque X, Y, Z etc. functionibus ipsius x et constantium tantum, modulo a ipsas non ingrediente. Etiamsi enim ipsa aequatio $dz = P\,dx$ sit differentialis, tamen aequatio modularis $z = A\int X\,dx + B\int Y\,dx + C\int Z\,dx$ etc. instar algebraicae est consideranda.

§. 4. Nisi autem P talem habuerit valorem aequatio modularis vel erit differentialis gradus primi vel altioris gradus. Differentialis quidem primi gradus erit, si Q vel erit quantitas algebraica, vel integrale ipsius $P\,dx$ inuoluet, hoc enim casu z loco $\int P\,dx$ substitutum tollet quoque signum summatorium, ita vt aequatio modularis differentialis pura sit proditura.

§. 5. Deprehendi vero in superiore dissertatione, Q toties algebraicum habere valorem quoties P talis fuerit ipsarum a et x functio, vt numerus dimensionum, quas a et x constituunt sit vbique idem atque -1, seu

quoties Px vel Pa fuerit functio ipſarum a et x nullius dimenſionis. Deinde etiam obſeruaui, quoties in P litterae a et x eundem tantum vbique conſtituant dimenſionum numerum, toties Q ab integratione ipſius Pdx pendere. Ex quo, cum tam eximia conſequantur ſubſidia ad aequationes modulares inueniendas, maxime iuuabit inueſtigare, num forte aliae dentur huiusmodi functiones ipſius P, quae iisdem praerogatiuis gaudeant. Has igitur a priore inueſtigare conſtitui, quo ſimul methodus tales functiones inueniendi aperiatur.

§. 6. Si P eſt functio ipſarum a et x dimenſionum -1, ſeu z functio ipſarum a et x nullius dimenſionis, oſtendi fore $Px+Qa=0$, ſeu $Q=-\frac{Px}{a}$. Sumamus igitur eſſe $Q=-\frac{Px}{a}$ et quaeramus, qualis ſit P functio ipſarum a et x. At ſi $Q=-\frac{Px}{a}$ erit $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$. Quamobrem P talis eſſe debebit functio ipſarum a et x, vt $dx-\frac{xda}{a}$ per eam multiplicatum euadat integrabile. Hic autem per integrabile non ſolum intelligo, quod integratione ad quantitatem algebraicam, ſed etiam quod ad quadraturam quamcunque reducitur. Si igitur generaliter inuenerimus quantitatem, in quam $dx-\frac{xda}{a}$ ductum ſit integrabile, ea erit quaeſitus valor ipſius P, eius proprietatis, vt ſit $Q=-\frac{Px}{a}$.

§. 7. Fit autem $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile ſi multiplicatur per $\frac{1}{a}$, integrale enim erit $\frac{x}{a}+c$, deſignante c quantitatem conſtantem quamcunque ab a non pendentem. Quocirca, ſi $f(\frac{x}{a}+c)$ denotet functionem quamcunque

cunque ipſius $\frac{x}{a}+c$, fiet quoque $dx-\frac{xda}{a}$ integrabile, ſi multiplicetur per $\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Qui valor cum ſit maxime generalis, erit $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, et $Q=-\frac{Px}{a}$. Eſt vero $f(\frac{x}{a}+c)$ functio quaecunque ipſarum a et x nullius dimenſionis. Quamobrem quoties Pa fuerit functio nullius dimenſionis ipſarum a et x, toties erit $Q=-\frac{Px}{a}$, ideoque aequatio modularis $dz=Pdx-\frac{Pxda}{a}$.

§. 8. Sit $Q=A-\frac{Px}{a}$, et A functio quaecunque ipſius a et conſtantium; erit $dz=Pdx+Ada-\frac{Pxda}{a}$ ſeu $dz-Ada=Pdx-\frac{Pxda}{a}$. In qua aequatione cum $dz-Ada$ ſit integrabile, debebit $Pdx-\frac{Pxda}{a}$ quoque eſſe integrabile. Hoc autem per praecedentem operationem euenit ſi $P=\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$. Tum igitur erit $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$. Simili ratione intelligitur ſi fuerit $P=X+\frac{1}{a}f(\frac{x}{a}+c)$, denotante X functionem ipſius x tantum, fore $Q=A-\frac{x}{a^2}f(\frac{x}{a}+c)$, vbi vt ante $f(\frac{x}{a}+c)$ exprimit functionem quamcunque ipſarum a et x nullius dimenſionis.

§. 9. Sit $Q=-\frac{nPx}{a}$, vbi n indicet numerum quemcunque; erit $dz=Pdx-\frac{nPxda}{a}$. Debebit ergo P talis eſſe quantitas, quae $dx-\frac{nxda}{a}$ ſi in id multiplicetur, reddat integrabile. Fit autem $dx-\frac{nxda}{a}$ integrabile, ſi ducatur in $\frac{1}{a^n}$, integrale enim erit $\frac{x}{a^n}$. Quare generaliter erit $P=\frac{1}{a^n}f(\frac{x}{a^n}+c)$. Atque quoties P talem

habuerit valorem erit $Q = -\frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Intelligitur etiam si fuerit $P = X + \frac{1}{a^n} f(\frac{x}{a^n} + c)$, fore quoque generalius $Q = A - \frac{nx}{a^{n+1}} f(\frac{x}{a^n} + c)$. Vbi vt ante et in posterum semper f denotat functionem quamcunque quantitatis sequentis. At A est functio quaecunque ipsius a, et X functio quaecunque ipsius x tantum.

§. 10. Quo igitur dignosci queat, an datus quispiam valor ipsius P in formula inuenta contineatur, poni debebit $a = b^{\frac{1}{n}}$, quo facto videndum est, an Pb fiat functio ipsarum b et x nullius dimensionis, vel an prodeat aggregatum ex functione quadam ipsius x tantum, et tali functione. Quod si deprehendetur, habebit P proprietatem requisitam, eritque Q aequale huic ipsi functioni in $-\frac{nx}{a}$ ductae vna cum functione quacunque ipsius A. In vniuersum autem notandum est quantitatem P functione ipsius x vt X, et Q functione ipsius a vt A posse augeri. Nam si fuerit $dz = P\,dx + Q\,da$ aequatio modularis, talis quoque erit aequatio $dz = P\,dx + X\,dx + Q\,da + A\,da$. Posito enim du loco $dz - X\,dx - A\,da$ habebitur $du = P\,dx + Q\,da$, quae cum priore prorsus congruit. Hancobrem superfluum foret in posterum ad valorem ipsius Q assumtum, functionem A ipsius a adiicere. Quare hanc apparentem generalitatem negligemus.

§. 11.

§. 11. Sit nunc $Q = PE$ denotante E functionem quamcunque ipsius a. Erit itaque $dz = P dx + PE da$ et P talis quantitas, quae reddit $dx + E da$ integrabile. At si $P = 1$ fit integrabile hoc differentiale, integrale enim erit $x + \int E da$. Quamobrem erit $P = f(x + \int E da)$ et $Q = Ef(x + \int E da)$. Siue si ponatur $\int E da = A$, fueritque $P = f(x + A)$ erit $Q = \frac{dA}{da} f(x + A)$. Num autem datus ipsius P valor in hac formula contineatur, hoc modo est inuestigandum, ponatur $x = y - A$. et quaeratur, an pro A talis accipi queat functio ipsius a et constantium, vt P fiat functio solius y et constantium, quam modulus a non amplius ingrediatur.

§. 12. Ponamus esse $Q = PY$, vbi Y sit functio quaecunque ipsius x modulum a non inuoluens. Quo posito erit $dz = P dx + PY da$, et P talis functio quae efficiat $dx + Y da$ integrabile. Posito autem $P = \frac{1}{Y}$, sit $z = \int \frac{dx}{Y} + a = X + a$, si ponatur $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + a)$. Quoties ergo P huiusmodi habuerit valorem erit semper $Q = f(X + a)$.

§. 13. Sit nunc generalius positum $Q = PEY$ erit $dz = P dx + PEY da$, vbi vt ante E denotat functionem ipsius a, Y vero ipsius x. Perspicuum est, si fuerit $P = \frac{1}{Y}$ formulam istam differentialem effici integrabilem, prodiret enim $z = \int \frac{dx}{Y} + \int E da$, seu $z = X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$. Quamobrem erit $P = \frac{1}{Y} f(X + A) = \frac{dX}{dx} f(X + A)$ hisque in casibus fiet $Q = \frac{dA}{da} f(X + A)$. Comprehenduntur in his formulis etiam logarithmici ipsarum A et X valores, vt si sit $X = lT$ et $A = -lF$, erit $P = \frac{dT}{T dx} : \frac{T}{F}$ et $Q = \frac{-dF}{F da} f \frac{T}{F}$.

§. 14.

§. 14. Perſpicitur igitur omnes has formulas locum habere, ſi aequatio propoſita fuerit vel $dz = dX\, f(X+A)$ vel $dz = \frac{dX}{X} f\frac{X}{A}$. Quoties ergo aequatio propoſita ad has formas poterit reduci, ſubſtituendis X pro functione quacunque ipſius x et A pro functione quacunque ipſius a, toties aequatio modularis poterit exhiberi: erit enim priore caſu $dz = dX f(X+A) + dA f(X+A)$ in poſteriore vero caſu $dz = \frac{dX}{X}, f\frac{X}{A} - \frac{dA}{A} f\frac{X}{A}$. Id quod quidem in his vniuerſalibus exemplis facile perſpicitur, in ſpecialioribus vero multo difficilius. Quocirca maximum poſitum erit ſubſidium in reducendis caſibus particularibus ad has generales formas, id quod, ſi quidem talis reductio fieri poteſt, non difficulter praeſtatur.

§. 15. Si ponatur $Q = PR$, deſignante R functionem quamcunque ipſarum a et x, erit $dz = P dx + PR da$. Ad inueniendum nunc valorem ipſius P, ſumatur formula $dx + R da$, ſeu aequatio $dx - R da = o$ conſideretur, et quaeratur quomodo indeterminatae a et x a ſe inuicem poſſint ſeparari, ſeu quod idem eſt, per quamnam quantitatem $dx + R da$ debeat multiplicari, vt fiat integrabilis. Sit haec quantitas S et ipſius $S dx + RS da$ integrale T erit $P = S f T$. Hisque in caſibus erit $Q = RS f T$. Haec operatio latiſſime patet et omnes caſus complectitur, quibus Q cognitum et a z non pendentem habet valorem.

§. 16. Progrediamur autem vlterius et in eos ipſius P valores inquiramus, in quibus Q non ſolum a P ſed etiam

etiam a $\int P dx$ seu a z pendet. Ponatur igitur primo $Q = \frac{nz}{a} - \frac{Px}{a}$, denotante n numerum quemcunq;. Erit ergo $dz = P dx + \frac{n z da}{a} - \frac{P x da}{a}$, seu $dz - \frac{n z da}{a} = P dx - \frac{P x da}{a}$. Multiplicetur vtrinque per $\frac{1}{a^n}$, quo prodeat haec aequatio $\frac{dz}{a^n} - \frac{n z da}{a^{n+1}} = \frac{P dx}{a^n} - \frac{P x da}{a^{n+1}}$, in qua prius membrum est integrabile. Debebit ergo etiam integrabile esse alterum membrum $\frac{P dx}{a^n} - \frac{P x da}{a^{n+1}}$, ex quo idoneus ipsius P valor est quaerendus. Euenit hoc si $P = a^{n-1}$, erit enim integrale $\frac{x}{a} + c$. Quare erit vniuersaliter $P = a^{n-1} f(\frac{x}{a} + c)$, id quod contingit si $\frac{P}{a^{n-1}}$ est functio ipsarum a et x nullius dimensionis seu P functio ipsarum a et x dimensionum $n-1$. Hoc igitur casu est $nz = Px + Qa$ vt in superiore dissertatione ostendimus.

§. 17. Sit $Q = \frac{nz}{a} + PEY$, vbi E ex a, et Y ex x vtcunque est compositum. Erit itaque $dz - \frac{n z da}{a} = P dx + PEY da$, et $\frac{dz}{a^n} - \frac{n z da}{a^{n+1}} = \frac{P dx}{a^n} + \frac{PEY da}{a^n}$. Quam obrem P ita debet accommodari, vt $\frac{dx + EY da}{a^n}$ per id multiplicatum euadat integrabile. Fit hoc autem si $P = \frac{a^n}{Y}$, quo casu integrale est $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu $X + A$ posito $\int \frac{dx}{Y} = X$ et $\int E da = A$. Quare debebit esse $P =$

$\frac{a^n dX}{dx} f(X+A)$, et in his casibus erit $Q = \frac{a^n dA}{da} f(X+A) + \frac{nz}{a}$. Si X et A a logarithmis pendeant prodibit P huius valoris $\frac{a^n dX}{X dx} f\frac{X}{A}$ cui respondebit $Q = \frac{nz}{a} - \frac{a^n dA}{A da} f\frac{X}{A}$.

§. 18. Si ponatur $Q = Fz + P'EY$, et F et E functiones sint ipsius a, Y vero ipsius x. Tum erit $dz - Fz da = P dx + PEY da$. Ponatur $\int F da = lB$, ita vt B sit functio ipsius a, et diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P dx}{B} + \frac{PEY da}{B}$. Cum igitur prius membrum sit integrabile, et alterum tale effici debet. Fit hoc si $P = \frac{B}{Y}$ tumque erit integrale $\int \frac{dx}{Y} + \int E da$ seu X+A. Quocirca erit ipsius P valor quaesitus $\frac{B dX}{dx} f(X+A)$, Q vero erit $\frac{z dB}{B da} + \frac{B dA}{da} f(X+A)$. Perspicitur quoque si fuerit $P = \frac{B dX}{X dx} \int \frac{X}{A}$ fore $Q = \frac{z dB}{B da} - \frac{B dA}{A da} \int \frac{X}{A}$.

§. 19. Latissime patebit solutio si ponatur $Q = Fz + PR$ et R fuerit functio ipsarum a et x. Erit enim $dz - Fz da = P dx + PR da$. Posito $\int F da = lB$ diuidatur per B habebitur $\frac{dz}{B} - \frac{z dB}{B^2} = \frac{P}{B}(dx + R da)$. Sit iam S functio efficiens $dx + R da$ integrabile sitque $\int (S dx + SR da) = T$. Quo inuento erit $P = BS f T$ huic respondet $Q = \frac{z dB}{B da} + BRS fT$.

§. 20. Possunt praeterea plures huiusmodi valores ipsius P coniungi, hocque modo multo latius extendi vt

vt si ponatur $P = \frac{B dX}{dx} f(X+A) + \frac{B dY}{dx} f(Y+E)$ erit $Q = \frac{z dB}{B da} + \frac{B dA}{da} f(X+A) + \frac{B dE}{da} f(Y+E)$. Atque simili modo numerus terminorum quantum libuerit, poterit augeri. In his igitur casibus omnibus aequatio modularis differentialis primi casus inuenitur. Quamobrem his expeditis pergo ad eos casus inuestigandos, inquibus aequatio modularis primi gradus differentialis non datur, sed qui tamen ad aequationem modularem differentio-differentialem perducuntur.

§. 21. Si igitur Q neque algebraice per a et x neque per z potest exprimi, ii inuestigandi sunt casus quibus differentiale ipsius Q poterit exhiberi. Est autem $Q = \frac{dz - P dx}{da}$, ergo $dQ = d\frac{dz - P dx}{da}$. Quare si differentiale ipsius Q vel per sola a et x vel per haec et Q vel etiam simul per z poterit exprimi, habebitur aequatio modularis, quae erit differentialis secundi gradus. Ostensum autem est superiore dissertatione si ponatur $dP = L dx + M da$ fore $dQ = M dx + N da$, ita vt haec differentialia communem literam M inuoluant. Quia autem ex dato P etiam M datur, nil aliud requiritur, nisi vt N determinetur. Quamobrem in eos inquiremus casus, quibus N vel algebraice, vel per Q vel per Q et z exprimi potest. Tum enim habebitur aequatio modularis $M dx + N da = d. \frac{dz - P dx}{da}$, posito in N loco Q eius valore $\frac{dz - P dx}{da}$.

§. 22. Ex praecedentibus satis intelligitur, si N per sola a et x determinetur, fore $M = \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et $N = \frac{dA}{da} f(X+A)$, seu $M = V + \frac{dX}{dx} f(X+A)$ et N

$= I + \frac{dA}{da} f(X+A)$ denotante V functionem quamcunque ipsius x et I ipsius a. Ex dato itaque P quaeratur M, differentiando P posito x constante, et differentiali inuento per da diuidendo. Quo facto quaeratur an valor ipsius M in formula $V + \frac{dX}{dz} f(X+A)$ continea-tur. Quod si fuerit compertum et X et A et V definitae, erit $V dx + dX f(X+A) + I da + dA f(X+A) = d.\frac{dz-Pdx}{da}$ aequatio modularis desiderata. Notandum est in posterum semper loco $\frac{dX}{dx} f(X+A)$ poni posse aggregatum ex quotuis huiusmodi formulis $\frac{dX}{dx} f(X+A) + \frac{dY}{dx} f(Y+B) +$ etc. At loco $\frac{dA}{da} f(X+A)$ tunc poni debebit $\frac{dA}{da} f(X+A) + \frac{dB}{da} f(Y+B)$ etc. Hoc igitur monito in posterum tantum vnica formula $\frac{dX}{dx} f(X+A)$ eique respondente $\frac{dA}{da} f(X+A)$ vtemur.

§. 23. Pendeat N simul etiam a Q sitque $N = R + DQ$, vbi D sit functio ipsius a, et R functio ipsarum a et x ex conditionibus sequentibus determinanda. Erit igitur $dQ - DQda = M dx + R da$, sit $D da = \frac{dH}{H}$ et diuidatur vtrinque per H prodibit $\frac{dQ}{H} - \frac{Q dH}{H^2} = \frac{M dx + R da}{H}$. In qua aequatione, cum illud membrum sit integrabile, tale quoque hoc $\frac{M dx + R da}{H}$ est efficiendum. Fiet igitur per praecedentem methodum $M = \frac{H dx}{dx} f(X+A)$ et $R = \frac{H da}{da} f(X+A)$. Quare si in exemplo quopiam proposito ex P reperiatur M talis valoris, erit $N = \frac{H dA}{da} f(X+A) + \frac{dH}{H da^2}(dz - P dx)$ posito $\frac{dH}{H da}$ loco D et $\frac{dz-Pdx}{da}$ loco Q. Atque hinc in promptu erit aequatio modularis.

§. 24.

§. 24. Si N non a Q sed a z pendeat, ita vt sit $N = R + Cz$, denotante C functionem ipsius a quamcunque; erit $dQ - Cz\,da = M\,dx + R\,da$. At quia est $dz - Q\,da = P\,dx$, addatur huius multiplum $F\,dz - QF\,da = PF\,dx$, existente F functione ipsius a, quo facto orietur aequatio $dQ - QF\,da + F\,dz - Cz\,da = (M + PF)\,dx + R\,da$. Ponatur $F\,da = \frac{dB}{B}$ et $\frac{C\,da}{F} = \frac{dG}{G}$, ita vt sit $F = \frac{dB}{B\,da}$ et $C = \frac{dB\,dG}{BG\,da^2}$. Perspicuum itaque est $dQ - QF\,da$ integrabile reddi si diuidatur per B seu multiplicetur per $\frac{1}{B}$, $F\,dz - Cz\,da$ autem fit integrabile, si multiplicetur per $\frac{1}{FG}$. Quare quo idem factor summam horum differentialium reddat integrabilem debebit esse $FG = B$ seu $\frac{G\,dB}{B\,da} = B$, vnde fiet $G = \frac{B^2\,da}{dB}$. Hancobrem alterum quoque membrum per B diuisum est integrabile efficiendum scilicet $\frac{(M + PF)\,dx + R\,da}{B}$. Quocirca facio $R = \frac{B\,dA}{da} f(X + A)$ et $M + PF = \frac{B\,dX}{dx} f(X + A) = M + \frac{P\,dB}{B\,da}$. Innestigari igitur debet proposito exemplo, an loco A, B et X tales functiones inueniri queant, quae exhibeant formulam $\frac{P\,dX}{dx} f(X + A)$ aequalem ipsi $M + \frac{P\,dB}{B\,da}$. Hisque inuentis erit $N = \frac{B\,dA}{da} f(X + A) + \frac{z\,dB\,dG}{BG\,da^2}$ existente $G = \frac{B^2\,da}{dB}$, qui valor in aequatione $M\,dx + N\,da = d.\frac{dz - P\,dx}{da}$ substitutus dabit aequationem modularem.

§. 25. Sit nunc generalissime $N = R + DQ + Cz$, tenentibus R, D et C iisdem quibus ante valoribus. Erit ergo $dQ - DQ\,da - Cz\,da = M\,dx + R\,da$, addatur ad hanc aequatio $F\,dz - FQ\,da = PF\,dx$, quo habatur $dQ - DQ\,da - FQ\,da + F\,dz - Cz\,da = (M + PF)\,dx +$

Rda. Positis autem vt ante $Dda = \frac{dH}{H}$, $Fda = \frac{dB}{B}$, et $\frac{Cda}{F} = \frac{dG}{G}$, fit $dQ - DQda - FQda$ integrabile si ducatur in $\frac{1}{HB}$, et $Fdz - Czda$ integrabile fit ductum in $\frac{1}{FG}$. Quare debebit esse $HB = FG = \frac{G\,dB}{Bda}$ et $G = \frac{B^2 H da}{dB}$. Atque $\frac{(M+PF)dx+Rda}{HB}$ reddendum est integrabile: fiet ergo facto $HB = E$, $R = \frac{EdA}{da} f(X+A)$ et $M+PF = \frac{EdX}{dx} f(X+A)$. Quocirca in casu proposito A, X, E et F si fieri potest ita debent definiri, vt $\frac{EdX}{dx} f(X+A)$ aequale fiat ipsi $M+PF$. Hocque inuento erit $N = \frac{EdA}{da} f(X+A) + \frac{dH}{Hda^2}(dz - Pdx) + \frac{Fz\,dG}{Gda}$, vnde aequatio modularis reperitur.

§. 26. At si nequidem differentialis secundi gradus aequatio modularis obtineri poterit; ad differentialia tertii gradus erit procedendum. Fiet ergo $N = \frac{d(\frac{dz-Pdx}{da}) - Mdx}{da}$ atque hinc posito $dN = sdx + tda$, erit $sdx + tda = d\left(\frac{d(\frac{dz-Pdx}{da}) - Mdx}{da}\right)$. Datur autem s ex M, cum sit sda differentiale ipsius M, quod prodit, si x ponatur constans. Quamobrem t tantum debebit inuestigari. Sit ergo $t = R + EN + DQ + Cz$, ideoque $dN - ENda - DQda - Czda = sdx + Rda$. Cum sit autem $dQ - Nda = Mdx$ et $dz - Qda = Pdx$, addantur horum multipla ad illam aequationem, vt prodeat haec aequatio $dN - ENda - FNda + FdQ - DQda - GQda + Gdz - Czda = (s + MF + PG)dx + Rda$. Sit $Eda + Fda = \frac{df}{f}$, $\frac{Dda+Cda}{F} = \frac{dg}{g}$ et $\frac{Cda}{G} = \frac{dh}{h}$, fiatque $f = Fg = Gh$.

$= G\,b$. Quo facto aequationis inuentae prius membrum fit integrabile diuiſum per f; hanc ob rem et $\frac{(s+MF+PG)\,dx+R\,da}{f}$ efficiendum eſt integrabile. Ponendum igitur eſt $R = \frac{f\,dA}{da}$ $f(X+A)$ et $s+MF+PG = \frac{f\,dX}{da} f(X+A)$. In aequatione ergo propoſita, quia s et M ex P dantur, debent F, G et f et X ex hac aequatione determinari. Quo facto ſumatur $g = \frac{f}{F}$ et $b = \frac{f}{G}$, et $C = \frac{G\,db}{b\,da}$, et $D = \frac{F\,dg}{g\,da} - G$ et $E = \frac{df}{f\,da} - F$. Atque ex his cognita erit aequatio $t = R + EN + DQ + Cz$, ex qua aequatio modularis facile conflatur. Simili modo ex his intelligitur quomodo pro altioribus differentialium gradibus operatio debeat inſtitui, vt ad aequationes modulares perueniatur.

§. 27. In compendium nunc, quae hactenus tradidimus, redigamus tum quo facilius quaeuis aequatio propoſita reduci queat, tum quo proceſſus ad cuiusque gradus differentialia clarius perſpiciatur. Propoſita igitur aequatione $dz = P\,dx$, ponatur x conſtans et a tantum variabile ſitque $dP = M\,da$, $dM = p\,da$, $dp = r\,da$ etc. Sit porro $Q = \frac{dz - P\,dx}{da}$, $N = \frac{dQ - M\,dx}{da}$, $q = \frac{dN - p\,dx}{da}$ et $s = \frac{dq - r\,dx}{da}$ etc. vbi dQ, dN, et dq, etc. ſunt differentialia ipſorum Q, N et q, quae ex valoribus $\frac{dz - P\,dx}{da}$, $\frac{dQ - M\,dx}{da}$ et $\frac{dq - r\,dx}{da}$, inueniuntur poſitis a, x et z variabilibus. Hanc igitur ob rem cognitae erunt M, p, r etc. ex ſolo P, ex his vero habebuntur Q, N, q etc. Sint praeterea A, B, C, D, E, F etc. ſunctiones ipſius a et conſtantium, et X, Y etc. functiones ipſius x non involuentes a.

§. 28

§. 28. His praemiſſis ſi fuerit P talis functio ipſius x et a, vt BP comprehendatur in hac forma $\frac{dX}{dx} f(X+A)$ ſeu plurium huiusmodi formularum aggregato, ſemper dari poterit aequatio modularis differentialis primi gradus. Namque erit $PdAdx = z^{\frac{dB/X}{B}} + Q\,dadX$ ſeu $BPdA\,dx = z\,dBdX + BQ\,dadX$. Quae aequatio ob datum Q eſt modularis reſpondens aequationi propoſitae.

§. 29. Deinde ſi P talis ſit functio ipſarum a et x vt $BP+CM$ aequalis fieri poſſit $\frac{dX}{dx} f(X+A)$ ſeu quotcunque huiusmodi formularum aggregato, aequatio modularis ad differentialia ſecundi gradus aſcendet. Erit enim $BPdAdx + CMdAdx = z\,dBdX + BQ\,dadX + QdC\,dX + CN\,dadX$. Quae eſt aequatio modularis quaeſita, et involuit differentialia ſecundi gradus, quia eam littera N ingreditur, quae per dQ ideoque per ddz, ddx et dda determinatur.

§. 30. At ſi fuerit $BP+CM+Dp$ aequalis huic formulae $\frac{dX}{dx} f(X+A)$ vel aggregato quotcunque huiusmodi formularum; aequatio modularis erit differentialis tertii gradus, prodibit enim iſta aequatio $BPdA\,dx + CMdAdx + DpdAdx = z\,dBdX + BQ\,dadX + QdC\,dX + CN\,dadX + NdD\,dX + D\,q\,dadX$. Quemadmodum ex ante traditis colligere licet, ſi modo quantitates ab a tantum pendentes ad has formulas accommodantur.

§. 31. Simili modo ad altiora differentialia progreſſus facile abſoluitur. Nam ſi $BP+CM+Dp+Er$

$+Er$ aequetur formulae $\frac{dx}{dx} f(X+A)$ vel talium plurium formularum aggregato, orietur aequatio modularis ista $BPdAdx+CMdAdx+DpdAdx+ErdA dx=zdBdX+BQdadX+QdCdX+CNdadX+NdDdX+DqdadX+qdEdX+EsdadX$ quae erit differentialis quarti gradus. Atque hoc modo quousque libuerit hae operationes facile continuantur ex sola allatarum inspectione.

§. 32. His autem omnibus perspectis maxima tamen difficultas saepenumero posita erit in dignoscenda functione P, an in his expositis generibus contineatur et in quonam genere. Etiam si enim generales ipsius P valores, qui ex assumtis formulis obtinentur nihil difficultatis in se habere videantur, tamen exemplis particularibus propositis accommodatio saepissime erit difficillima. Cuius rei ratio nequaquam methodo traditae est tribuenda, sed imperfectae functionum cognitioni, quae adhuc habetur. Quamobrem non solum in hoc negotio, sed in plurimis etiam aliis casibus maxime vtile foret, si functionum doctrina magis perficeretur, et excoleretur.

§. 33. Quantum quidem mihi hac de re meditari licuit, eximium subsidium inueni, si P statim ad huiusmodi formam $\frac{dx}{dx} f(X+A)$ vel huiusmodi formularum aggregatum reducatur, id quod sequenti modo facillime praestatur, Prima aequatio proposita non constituatur inter z et x sed inter z et y, ita vt aequatio ad modularem perducenda sit $dz=Tdy$, existente T

functione ipsius y et moduli a. Tum accipiatur pro x talis functio ipsarum a et y, quae transmutet T in functionem ipsarum a et x contentam in formula $f(X+A)$, vel pluribus huic similibus, earumque multiplis, in quibus X est functio ipsius x tantum, et A ipsius a. Hoc igitur facto prodeat aequatio $dz = S\,dx\,f(X+A)$ vbi S sit quantitas tam simplex quam fieri potest. Quare P erit $Sf(X+A)$ ideoque cum M, p etc. coniuncta facilius cum generalibus formulis comparatur. Inuenta autem hoc modo aequatione modulari, valor ipsius x in a et y assumtus, vbique loco x, loco dx autem differentiale huius valoris positis a et y variabilibus substituatur. Quo facto habebitur aequatio modularis inter a, y et z, quae quaerebatur.

§. 34. Ad pleniorem quidem methodi hactenus traditae cognitionem maximam lucem afferrent exempla et problemata, quorum solutio istam methodum requirit. Sed quia ipsorum problematum dignitas peculiarem tractationem postulat, in aliud tempus, ne hoc tempore nimis sim longus, eam differo.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA

CONTINENS

PHYSICA.

CIRCA

STRVCTVRAM THYMI, NOVAE OBSERVATIONES.

AVCTORE

Ioh. Georg. Du Vernoi.

§. 1.

VT in Veri inuentione adiuuemur ac quae doctrinae Anatomicae fundamenta sunt iacta minus ignoremus, eo primum annitendum est, vt quicquid seu nostra seu prisca aetate in Maiorum et iuniorum exemplaribus quae de Re Anatomica sunt conscripta, ab aliis est pertractatum et illustratum, animo probe impressum teneamus et eius memoriam diligentissime seruemus. Nam sine istiusmodi fundamentis, in cuiuslibet partis disquisitione, facile est, vt mihi aut aliis qui inuenta ignorant, quicquid oculis obuersabitur, nouum spectaculum esse credatur. Anatome vero, inquis, hac aetate ad eiusmodi lapsus minus est propensa. Ita fateor existimandum videretur, si aliter non esset compertum, eo argumento et specimine, quod iam tradere animus est.

§ 2. Thymus vulgo *Lactes*, vt apud noſtrae aetatis Anatomicos eſt delineatus, tametſi neque fabrica neque vſus ea delineatione ſit ſatis illuſtratus, cuius videlicet hiſtoria, vt hodie traditur, haud plura continet quam nomen, ſitum, extenſionem, figuram, connexionem, vaſa communia, diſſenſiones et coniecturas parum vtiles de ductu excretorio, humore, etc. non obſtat, quin ea quantum ad cognitionem inuentorum et obſeruationum ab initio Anatomes vsque in hoc tempus inſtitutarum ſpectat, omni ex parte abſoluta et perfecta meo iudicio cenſeretur. Ea profecto ratione, ante me, vt credebam, ſtructura interior Thymi penitus delitescebat: Quod tamen iudicium, re melius perſpecta et pro ſtudio veritatis improbaui, poſtquam apud *Thomam Bartholinum* primum, hinc apud *Petrum Dionyſium* praefatam ſtructuram iam indicatam, a Iunioribus vero omiſſam fuiſſe haud ſine admiratione cognouerim. *Thomas Bartholinus* Anatom. quintum renov. Lib. II. Cap. VI. *Cauitatem in medio Thymi* Hafniae 1652. manifeſto a ſe obſeruatam eſſe primus teſtatur: Quae, inquit, etiam poſtea viſa *Graefio* humore limpido repleta. *Petro Dionyſio* obſeruante, *Anatomie de l'homme troiſieme edition, ſeixieme demonſtration des parties de la Poitrine. La Fagoue eſt une Glande conglomerée . . . . . on remarque quelle a dans ſa partie moyenne une cavité qui eſt pleine de Lymphe.*

§. 3. Si primum *Thymi* exteriorem conformationem contemplemur, Is triplici glandula in foetu vt *Thomas Bartholinus* l. c. indicat, vel melius tripartito in omni aetate diſtinguitur. Iudicii enim ratio, cur is vt

tri-

triplex glandula creditur, eſt adhuc, opinor, nimis incerta, vt aliquid tuto definire liceat. *Lobos* appellare eas diuiſiones magis rationi conſonum eſt. 2. Quam *Verheyenius*, vt rem apparentem tradit, videlicet praefatorum Loborum ſubdiuiſionem in minores lobulos, eſt profecto realis et ſenſui manifeſta compoſitio e plurimis lobulis eiusdem figurae, videlicet oblongae, quam poſt detractum commune ſeu exterius inuolucrum attingere procliue eſt, ſi quae praefatis lobulis intercepta ſunt interſtitia ſeu membranas tenuiſſimas pellucidas eos diſiungentes animaduertendo, hinc facta leui inciſione diſtrahendo, in aqua limpida perluſtraueris; Qua ratione totam ſuperficiem externam Thymi, parallelis et a ſe inuicem diſiunctis lobulis coagmentatam eſſe conſpexi.

§. 4. Porro praefata interſtitia ſingula ramis vaſculoſis per ea excurrentibus ſunt occupata, vnde ad lobulos incredibilis copia minimorum ramulorum propagatur. Quam vaſorum hic luxuriantium multitudinem et ordinem haud ſine magna admiratione ſum contemplatus. His, vt eſt viſum, accedit ſubſtantia quaedam alba lobulorum parietibus interpoſita: Facile enim eſt vnum colorem ab altero internoſcere, quia color lobulorum eſt opacus ad rubedinem vergens. An ſint nuda, an potius pinguedine permixta vaſa? in dubio relinquitur. Caeterum memini, Thymum e Cadauere optimo exſectum, hinc vaſi ſuper ignem impoſito iniectum, vt pinguedinem, calore ſolutum et liquefactum fuiſſe.

§. 5.

§. 5. Haud vna extenſionis ratio in praefatis lobulis eſt obſeruata. Sunt qui 9. lin. longitudinem aequant, ſed latitudine parum a ſe inuicem diſcrepant, vid. 3. lin. quos poſtremo propria membrana tenuiſſima pellucida obuolutos eſſe haud praetermittendum eſt.

§. 6. Dixi praefatis lobulis et interſtitiis totam ſuperficiem externam loborum coagmentatam eſſe, docente primum *Verheyenio*. Num vero tota moles Thymi ex omni parte iſtiusmodi lobulorum ſit compages? numque corpus denſum et vacui expers ſit nec ne? id quidem hactenus fuit incompertum: Nam praefata moles a Veteribus vt *corpus Glandoſum*, a Iunioribus vt Glandula conglomerata, et quod hinc conſequitur, vt corpus haud ſinuoſum ſed ſolidum, eſt propoſita: Quam ſtructuram interiorem Thymi, ſi obſeruationibus noſtris minus ſum deceptus, haud in ea particularum ratione, ſed in re longe diuerſa nuper a me inuenta, poſitam eſſe didici: Cuius tamen inuentionis laudem, ante me *Bartholino*, et poſt illum, *Dionyſio* debitam eſſe, ſupra lubens teſtatus ſum.

§. 7. Itaque Thymus interius ampla cauitate ſeu ſinu pollicem fere admittente eſt inſtructus, vt obſeruationes noſtrae primum inſtitutae fidem faciunt. Hunc ſupra memorata involucra videlicet membrana extima, hinc lobulorum ſubſtantia carnis ſpeciem aemulans exterius ambiunt cumque terminant. Poſtquam praefata ſubſtantia ad ambitum cauitatis peruenit, tametſi vlterius ad extremum Thymi prolongetur, haud iſtiusmodi ſinu eſt inſtructa, ſed compreſſa, et cauitatis expers eſt. Caeterum,

rum, quando ſemel ac iterum inſignem cauitatem in Thymo conſpexi, propterea haud exiſtimandum eſt, in omnibus et ſingulis cadaueribus eam inueniri: quam ſi contemplari ſemper procliue eſſet, Eius inuentio vt videtur haud ad hoc tempus dilata fuiſſet.

§. 8. Quam difficultatem profecto haud nouam eſſe, iam ſatis ex Anatome eſt compertum, imprimis in partium cauitatibus, quae mutationibus frequenter ſunt obnoxiae; ſed, inquis, ſi Thymo cauitas naturaliter eſt conceſſa, eius ad minimum ſubobſcura veſtigia adhuc internoſcere procliue erit: Quod iudicium, inter alia Glandulae Renales *Euſtachii* confirmant; Sinum enim peramplum, quo eas Natura indubie inſtruxit, interdum prima inſpectione inuenies: Nonnunquam deliteſcit et fere obliteratur, referens videlicet, corpus denſum et ſolidum cauitatisque expers, quod tamen exercitatum Anatomicum minus vetat, quin impreſſiones ſubobſcuras obliterati ſinus nonſolum perſpiciat, verum etiam diſtractione parietum eundem reſtituat.

§. 9. Itaque parietes Thymi leniter diſtrahendo, manifeſto obſeruaui, illam quoque ſubſtantiam, quam cauitatis expertem et compreſſam ſupra credebam, paulatim dehiſcere, nihilque aliud eſſe quam ſinum iam obliteratum, Cauitatisque ſupra memoratae continuationem. Porro in aliis Cadaueribus, quorum Thymus iſtiusmodi manifeſta cauitate haud erat inſtructus, primum difficile erat veſtigium ſinus internoſcere; Spatio tamen aliquot dierum, laxata eius compage, exiguum interſtitium obſeruabam, cuius diſtractione, coepi manifeſto animaduertere,

istiusmodi verum et regulare interstitium, totum tractum Thymi longe lateque penetrare, idque nihil aliud esse quam sinum contractum et iam obliteratum, vt e quarumdam partium Anatome alias compertum est.

§. 10. A Lobulis praefatam cauitatem circumambientibus, efformata sunt innumera spatiola in toto ambitu cauitatis conspicua, colore opaco subrubro notata ac interstitiis candido corpore repletis interstincta, vt vel prima inspectione intellexi. E praefati corporis, quo interior superficies magna parte est contexta, lucente albedine, et arearum diuersae magnitudinis subrubente colore et multitudine, species corporis maculati seu cancellati efficitur. An e nudis vasculis, vel permixto adipe, album corpus sit contextum nec ne? in re tam difficili et obnubilata definire minus procliue est. Vascula, quantum assequi potui, sub velo praetenui posita, canaliculorum fere vniformium, breuium, $\frac{1}{4}$ lin. latorum, ac sese mutuo inosculantium congeriem, hinc arearum seu cancellorum irregularis figurae et magnitudinis incredibilem numerum efformant. Quod praefato operi est superextensum tenuissimum velum, in eo solertiae et opificii admirabilis specimen sum contemplatus: videlicet, haud membranam seu telam, sed genus vermicularium et exilissimorum canaliculorum, totam interiorem superficiem vt filamenta subtilissima perreptantium: Nam superaffusa aqua, depressi prius et complicati canaliculi, vi aquae eos explicante et eleuante, innatare visi sunt: Quam structuram ante singulas areas admirabile reticulum efformantem, tametsi vltra areas super interstitia sit propagata, propter eiusdem

eiusdem insignem albedinem, quae interstitiis quoque est concessa, in his minus facile, quam in illis internoscere potui.

§. 11. Istiusmodi areis reticulatis, nonnulla corpuscula esse appensa, de quibus iam dicendum est, animaduertisse mihi visus sum. Ad quinarium, earum arcarum numerus erat limitatus: Caeterae enim omnes areae quas diu multumque contemplabar, sensu iudice, praefatis corporibus carebant. Quum stylo leuiter admoto, oculisque intentis, istiusmodi corpusculorum indolem inuestigarem, e medio ac super vnam quamque praefatarum quinque arearum quae a se inuicem longe distabant, vnum corpusculum egredi eique implantari, et styli agitationi tam facile obsequi, vt hinc inde eius motum obseruarem, plane ac indubie perspexi; Et quum eandem agitationem saepe instituissem, cognoui, haud sub areae reticulo, sed supra et extra reticulum, corpusculum positum esse, hinc in cauitate quam supra descripsi libere fluctuare. Ei, vt porro animaduerti, incredibilis tenuitatis filamentum erat annexum, quod altero extremo in areae fundo penetrare indeque ortum trahere videbatur, sicuti in singulis constanter sum contemplatus.

Caeterum, tam exili mole ea corpuscula constant, vt tametsi in cauitate fluctuent, in ea incidere minus procliue sit, quorum proptera inuentionem, cuidam colori eis proprio debitam esse fatendum est. Nam, quia carnis colorem aemulantur, ex aduerso interstitia vt supra indicaui, albo colore sunt praedita, ea ratione multum diuque perueſtigando, rem feliciſſime sum assecutus. Porro oua-

lem figuram, et laeuigatam ſuperficiem iisdem corporibus conceſſam eſſe iam ſupra obſeruaui.

§. 12. Ductu filamenti, quod e profundo areae emergere, et cum corpuſculo nexum habere dixi, interiorem conditionem et compoſitionem lobulorum, ſundum areae occupantium, attingere conatus ſum. Vtcunque ea de re ſit, coloris ſimilitudine, tam Lobuli, quam Corpuſcula praefata, plane conuenire viſa ſunt, videlicet ſubrubente carneo colore, vt vel prima inſpectione intellexi. Quos lobulos, et praefata corpuſcula, ſi haud plane deceptus ſum, vnum idemque corpus eſſe, iam absque haeſitatione compertum habeo. Quae enim corpuſcula intra cauitatem Thymi fluctuare prius obſeruaui, ea ſunt diſtractae et quaſi auulſae, et filamento ſupra memorato lobulis annexae, hinc ſupra areas eminentes particulae; Lobuli autem eaedem ſunt particulae, ſed profundius ſitae, in vnamque aream collectae, vt in plexibus glandulofis tenuium inteſtinorum. Num, cum inteſtinorum craſſorum ſolitariis glandulis, altera corpuſcula quae a lobulis ſunt auulſa, recte conferantur nec ne? Alii viderint. Proſtremo haud pluribus, quam vno plano praefatorum corpuſculorum, vt clare perſpexi, ſinguli lobuli erant compoſiti, quod planum vero in nonnullis latius et longius, in aliis contractius et minus oblongum apparebat: In illius plani tam interna quam externa facie, exiliſſima corpuſcula veſiculis ſeu globulis ſimilia, proptereaque veſicularem ſuperficiem conſpexi, vt duo videlicet haemiſphaeriola vtrinque protuberantia.

DE

DE ASPECTV ET CONFORMATIONE VARIA VASORVM SANGVINEORVM IN DIVERSIS PARTICVLIS VENTRICVLI, Obſeruationes.

AVCTORE
Ioh. Georg. Du Vernoi.

§. 1.

NOn ſolum in functionis Nobiliſſimae Machinae, in qua Alimenta intra breve temporis ſpatium, in ſomno aeque ac extra ſomnum, in ſuccum alibilem conuertuntur; verum quoque in eiusdem deprauationum iudicio, ſumma diligentia in hoc inquirendum eſt, num quando in defunctis rubicunda facies ventriculi vt plurimum eſt extincta, eiusdemque fibrae et membranae ſunt albae et pallidae, id propterea Vaſa ſanguinea hic minus abundare, vere indicet nec ne? Porro eo ſtudio et diligentia ea de re eſt tractandum, vt nonſolum generaliter caudices vaſorum, quam quidem cognitionem generalem haud improbo, ſed eam praecipue indolem aſſequamur, quam vaſa progrediendo acquirunt, ſuper vnum quodque planum tunicarum, iuxta ordinem et ſeriem, qua in fabrica ventriculi ſeſe inuicem excipiunt.

§. 2. Duplicem vasculosum contextum in ventriculo dari *Thomas Willis* primus est Auctor. *Vasa sanguifera* inquit *quamplurima ad ventriculum pertingunt, quod plane cernitur, si Hominis, canis, aut porci stomachus, vasis cochacis primo ligatis et resectis eximatur, et orificiis constrictis insletur, tunc enim iucundissimo spectaculo videbis, minores venarum et arteriarum truncos partim ventriculi summitati et partim fundo eius insertos, qui mox in ramos minores et deinde in ramusculos et propagines minimas diuisi sibi inuicem occurrunt et quaquaversus expansi totum stomachi ambitum perreptant et veluti coma fruticosa obducunt. Haec vasa sanguinea introrsum tendentia, in tunica intima neruosa terminantur, cuius interiorem superficiem prae densitate punctorum, in quo vasa desinunt, rubore inficiunt et quasi cruentant. Hoc manifesto liquet, si quando post stomachi immersionem in aqua feruenti, tunica villosa separetur, tunc enim tunica nervea ob densissimas vasorum terminationes quodam quasi reticulo sanguineo obtecta videbitur.*

§. 3. Possem hic Cl. Virorum de istiusmodi vasis ventriculi obseruationes in medium afferre, videlicet de ratione vasorum in exteriore et interiore superficie, vti dictum est. Verum, maiori Rei Anatomicae emolumento, praestat rationem ostendere, qua inter duos praefatos terminos, et quod hinc consequitur, in singulis tunicis circulariter ventriculum ambientibus, tam multiplicationem incredibilem vasorum, quam diuersitatem admirabilem contextuum vascularium Natura sit molita. Nam, si obseruationibus nostris haud plane sumus decepti, alia aliaque textura,

textura, alius reptatus, aliae ramificationes vasorum inter sese discrepantes, in conspectum veniunt. Postremo, eam ordinis seriemque rationem, inter praefatos contextus vasculares obseruasse mihi visus sum, vt contextus minus subtilis vel crassior, a subtiliore, subtilior a crassiore vice mutua exciperetur.

§. 4. Ac primo, in extima tunica, Caudices vasorum in summa et ima regione cursum instituere, ac suo tumore extus prominere totumque ventriculum instar coronae cingere obseruantur. A praefatis caudicibus, magno numero tum super anteriorem quam super posteriorem faciem memoratae tunicae, vasa crassiora vsque ad medium, fluminum more decurrentia propagantur, quae postquam eo peruenerunt, arbusculi brevioris formam assumunt; Hinc series duplex illiusmodi arbusculorum, super vtramque faciem ventriculi efformatur, altera vertice deorsum, altera sursum spectante, quorum extrema, ultra praefatum terminum haud progredientia, mutuis inosculationibus copulantur.

§. 5. Sub memorato contextu, Nouum et plane diuersum opificium vasorum, in tunica cellulosa apparet, vt in tunicis adiposis C. H. Haud enim ductus seu canales ampli, longe lateque excurrentes hic sunt positi, verum quanta est cellularum congeries et subtilitas, tanta est multiplicatio et tenuitas vasculorum minimorum illas perreptantium, quae in modum subtilissimi et admirabili artificio elaborati reticuli inuicem sunt nexa et concatenata.

§. 6.

§. 6. Iam ſuper proxime ſequentem tunicam carnoſam, duplici ſerie fibrarum compoſitam, iterum vaſa alia lege incedere, conſpectumque plane mutare ſunt viſa: Etenim, in longum et latum, vaſa breuia, rectilinea, ramoſa, regulari ſerie, et certa diſtantia, vt ſurculi arboris breuiores truncati ac decuſſati, et quod hinc conſequitur, formam crucis mentientes, ſunt poſita, iuxta duplicem ſeriem fibrarum, quarum directionem ſequuntur: Vnde prima inſpectione, haud vt ſurculi ſingulares et cruciati, verum vt vas geminum decuſſatum viſa ſunt. Poſtremo, apices ſeu extrema praefatorum ſurculorum ſubito attenuata, minimis propaginibus terminantur, quae cum ſurculis vtrinque adſitis vltimo copulantur.

§. 7. Quarta ſubſequens Tunica ſub Muſculari ſita, vt multiplicatione, ſic ſubtilitate et fabrica vaſculorum minimorum eius cellulas perreptantium, eſt verum exemplar ſecundae ſupra deſcriptae: Nam ambae ſunt adipoſae, vt in optimis Cadaueribus eſt perſpicuum: Vnde hic, eius ſolum modo cum priore ſimilitudinem absque inutili repetitione annotaſſe ſufficit.

§. 8. Detracto eo velo adipoſo ſubtiliſſimo, aliud admirabile opificium vaſorum aduertendum eſt, a quo totum ventriculum ex omni parte obtectum eſſe manifeſto conſpeximus. Id quatuor antecedentibus, cum fabrica tum amplitudine vaſorum, nequaquam reſpondet. Sunt videlicet 1) ductus breuiores valde conſpicui, ampla eaque conſtanti diametro inſtructi, hinc arcuati, et vtroque extremo cum eiusdem generis ductibus inoſculati. vid. *Comment. Acad. Scient. Tom. IV.* 2) Per iſtiusmodi compagem,

pagem, et fabricam, opus regulare efficitur, ex quo innumera ſpatiola ſeu foueae, vt alueoli, efformantur. Idcirco, vtrumque eſt admiratione dignum, videlicet, incrementum ſubitaneum ſeu amplitudo vaſorum eo in tractu ventriculi, porro eorundem fabrica cancellatum opus referens, proxime attingens intimam ſeu poſtremam tunicam cauum ventriculi efformantem, de qua iam poſtremo agendum eſt.

§. 9. Vt hactenus memoratae tunicae ventriculi, nihil aliud fere ſunt quam congeries vaſculorum cum intermixtis partim cellulis adipoſis, partim fibris carneo tendineis; ſic interiorem vulgo nerueam tunicam, *Williſio* et *Rhuyſchio* primum obſeruante, tam in C. H., quam in nonnullis quadrupedibus, aeque inſigni copia vaſorum Natura inſtruxit: Quicquid enim neruorum his intertextum eſt, haud profecto nomine Nerueae tunicae eſt dignum, de quibus vid. *Comment. Acad. Imper. Tom. IV.* Conditio vel aſpectus vaſorum ſuper hancce tunicam ſic oblatus eſt. Vt in praecedente contextu, vaſa rariora grandioraque, et ramuſculorum capillarium ad ſenſum expertia, ex aduerſo ſuper hanc, mirum in modum ſunt extenuata, multiplicata et diuiſa, ac tanta ſolertia mutuo implicata, vt vel toto Corpore Humano, ullum opificium hactenus exſtare dubites, quod Diuini Artificis ſapientiam magis demonſtret.

CONTINVATIO OBSERVATIONVM ANATOMICARVM.

AVCTORE
Ioh. Georg. Du Vernoi.

Obſ. 1.

AD Oſſis Hyoidis, quod in cantu, loquela, et deglutitione, haud momenti expers eſt, perfectiorem notitiam, operae pretium eſt, inquirere, num, vt hic eſt obſeruatum, ambo eius Cornua ſint inaequalia? num eo in caſu, id e conſtanti Naturae inſtituto, an potius ex Naturae diuerſa operandi ratione de qua vid. *Aduerſ. Anat.* 1. *Animadu.* 28. *et Aduerſ.* 2. *Anim.* 29. Species profecto diſparitatis Cornuum Oſſis Hyoidis, in variis cadaueribus, haud ſolum ſuper diu aſſeruata et exſiccata, ſed etiam recentia et cruda, leuiore tamen in his discrimine, manifeſto eſt obſeruata: conſtanter enim, eodem latere, videlicet dextro, cornu breuius et contractius, ſiniſtrum longius eſt viſum.

Obſ. 2. De Ductu inſigni Appendicis Glanduloſae ſuper Thyroidem cartilaginem poſitae, hic rarum exemplum eſt oblatum. Is erat ita plenus et diſtentus, vt craſſitiem digiti exaequaret. Liquor albumen oui referebat. Caeterum, vtcunque ea de re ſit, tametſi ductus ac praefatus

ſatus liquor comprimeretur, aerque vi impelleretur, tam ſupra quam infra, cauitas nulla ad ſenſum apparebat.

Obſ. 3. Si, iuxta alias obſeruationes, in praefatam appendicem, infiicto leui vulnere, aer per tubulum fortius adigitur, canalis haud raro apparet, vltra fiſſuram Thyroidis cartilaginis ad concauam baſin oſſis Hyoidis, et, vt frequenter eſt obſeruatum, ſiniſtrorſum tendens. Qua obſeruatione, forte in ſuſpicionem cuiusdam ductus, multi ſunt adducti. Nunc aliter, vt videtur, de praefatae appendicis natura eſt iudicandum: nam in duobus Cadaueribus, fibrarum carnearum planum, vt continuata iſthmi ſubſtantia dextrorſum produci videbatur. Hae fibrae ab vno extremo ad alterum parallelae, faſciculum inaequalem, qui ad baſin Oſſis Hyoidis oblique ſcandens, ibi in tendinem terminari viſus eſt, producebant. Is faſciculus, muſculo thyrohyoideo ſic erat connexus, vt eius pars videretur. In quadam muliere, vnica, tenuis, et carnea fibra, nullumque aliud veſtigium appendicis apparebat.

Obſ. 4. Cui vſui praefata Appendix ſit comparata? Cur ſiniſtrorſum, ad latus muſculi thyrohyoidei, ſuper fiſſuram Thyroidis aſcendens, in caudam tendineam deſinit, quae in baſin concauam Oſſis Hyoidis implantari viſa eſt? ea de re forſan aliquid coniiciendi facultas erit, ſi cornuum Oſſis Hyoidis in prima Obſeruatione memorata conditio, ſpecialioribus Obſeruationibus confirmata eſſet: Quibus, ſi, vt alias eſt traditum, inter Os hyoidis, et glandulam thyroideam nexus, isque in ſi-

niſtra colli parte, et quod hinc conſequitur, ad ſiniſtrum cornu oſſis hyoidis, rarius dextrorſum ſit poſitus, minus eſſet alienum ſuſpicari, num ad vſum praefatae glandulae thyroideae, exceſſus longitudinis cornu ſiniſtri Oſſis Hyoidis, ſpectet nec ne? num forte in vocis, vel loquelae, vel deglutitionis actibus, molem corporis glanduloſi ſuſtentet, aut Laryngis aſcenſum promoueat etc. Nunc de Larynge nonnulla.

Obſ. 5. Petiolum Epiglottidis, quod interius e Thyroidis media fere parte ortum trahit, vt proceſſus immediatus, ſed mobilis, absque ligamento enaſci viſum eſt. Figura tereti, qua eſt ab initio, per 4. fere linearum longitudinem, vt et ſoliditate et craſſitie, per medium Epiglottidis, eſt extenſum, qua ſoliditate et duritie fouearumque defectu, a reliqua ſubſtantia Epiglottidis manifeſto diſtinguitur, ac propterea *acuta ac prominens interior pars Epiglottidis*, *quae veluti in oblongam aciem componitur*, recte a Celeb. *Santorino* eſt appellatum: cuius deſcriptioni adhuc adiiciendum eſt, quod nonſolum interiore, verum etiam exteriore parte, linguam reſpiciente, praefata acies promineat, et figura ſinuata ſeu flexuoſa inſtructa ſit. Vtroque eius latere, ſciſſurae profundae ſemicirculares ſunt conſpicuae, quibus ſubſtantia Epiglottidis, pari numero ſciſſurarum ſemicircularium accreta eſt, vnde in vtraque Epiglottidis facie, foveae ſeu foramina a Celeb. *Morgagno* primum annotata efformantur. Ea enim Epiglottidis ſubſtantia, exiguarum cartilaginum, vt totidem fragmenta, intermedia quadam materia disiunctarum congeries eſt, quarum nonnullae oblongae, aliae orbicu-

orbiculares ſunt viſae, omnes vero ſinuatae, quibus efficitur, vt media ſubſtantia foueis, vt iam dictum eſt, excauata, eius vero ambitus exterior, inciſus et laciniatus appareat.

Obſ. 6. Quam foueis interiectam, minimasque cellulas inuicem copulantem materiam indicauimus, ea, vt obſeruationes noſtrae fidem faciunt, primum exterius, in cauo Thyroidis ſuper petioli radicem, paulo largius et craſſius eſt aggeſta, vnde pars globoſa *Verheyenii* efficitur, hinc ſuper vtramque Epiglottidis faciem diffuſa et propagata intra cellulas ſeſe recipit, pars denique tenuiſſima cum minimorum vaſculorum ſanguineorum inſigni copia, ſpeciem Reticuli effformare viſa eſt: Quam materiam profecto, quoniam ab altera ſubſtantia Glanduloſa, de qua Celeb. *Morgagnius*, longe discrepat, ac vt videtur, pinguedini potius reſpondet, quam porro circa iſtiusmodi cartilagineas partes haud omiſſam fuiſſe conſtat, cur animaduerſione indignam hic cenſeremus? Vtrum, communi humore e glandulis ſtillante, duris aeque ac mollibus, interioribus et exterioribus partibus Laryngis, an potius, materia propria iſtiusmodi partium conditioni accommodata, cartilaginibus Laryngis, Natura ſapienter proſpexit, vt Illuſtr. *Morgagnius*, poſt diligentem indaginem memoratae Laryngis, primum ſuſpicatus eſt? quod iudicium tamen Doctiſſimo Viro minus poſtea placuit, propter quaepiam quae explicare haud neceſſe Ei viſum eſt: Propterea, iudicio noſtro haud fidentes, ad illuſtrationem fabricae interioris Cartilaginum praefatae Laryngis, a Celeb. Viris iam detectae, nonnulla adhuc, duce Anatome ſunt exponenda, vnde Naturae conſilium facile intelligitur.

Obſ. 7. Vel prima inſpectione, detracto involucro membranaceo externo, Laryngis cartilagines, vt prius ſuper Epiglottidem eſt obſeruatum, reticulari fabrica minimorum vaſculorum rubentium, cum admixta tenui adipoſa materia obduci, intelligitur. Si porro Arytae noidum extrema quorum vtrumque bicorne nobis eſt viſum, per medium iuxta longitudinem diuidas, tametſi cellulae ob exilitatem ſint inconſpicuae, quoddam coloris et ſubſtantiae diſcrimen in medio, vt diploe, manifeſto apparet. Corpus ſeu baſis, annotante primum Celeb. *Morgagnio*, celluloſa, liquore medullari turget: nam iuxta noſtras obſeruationes, duo hic ſunt animaduertenda interſtitia ſeu cauernae, ſubſtantiae ſpongioſae oſſium ſimiles, et ſucci medullaris flaueſcentis quasdam particulas continentes, vna in baſi, eaque amplior, altera parua orbicularis, paulo altius verſus ſuperficiem lunatam poſita. Caeterum, inter vtramque concauitatem nulla communicatio, ſenſu iudice, eſt inſtituta, ſi quosdam porulos excipias, cuiusmodi alias in cartilaginum ſubſtantia ſunt conſpicui.

Obſ. 8. In Cricoide cartilagine, nonſolum ea parte, qua ſinui Arytaenoidis inarticulatur, parte videlicet poſtica, verum etiam verſus anteriora, inſignis et circularis Zona cauernoſa, quae poſterius ad transuerſi digiti latitudinem eſt ampla, in cauo et medio thyroidis contractior, manifeſto apparet. In ea porro, vt in cellulis maiorum oſſium, copiam medullaris olei collectam eſſe perſpicuum eſt, vt ex preſſione intelligitur.

Obſ. 9.

Obſ. 9. Poſtremo in Thyroide, fabricam mixtam e ſubſtantia celluloſa et cartilaginea obſeruare procliue eſt: nam, tametſi alarum ſubſtantia e pura cartalagine ſit conflata, quaedam tamen diploe ſtrictior et compactior e cellulis minutiſſimis contexta, conſideranti patet. Iſtiusmodi autem fabrica cauernoſa imprimis perſpicua eſt circa margines poſticos, et circa proceſſus inferiores, qui cricoidis anticae parti inarticulantur.

OBSER-

OBSERVATIONES ANATOMICO-PRACTICAE,

A

Io. Fredr. Schreiber

communicatae.

Obſerv. 1.

Tab. X. et XI. EST curioſa magis, quam vtilis. Dabo tamen illam, quia tali oſſe caruit rariorum oſſium theſaurus *Rauianus*. Etenim, aperiundo cadauer hominis, modo ſani, a fumo enecti, cuius quam maxume turgidus ventriculus, ſiniſtram Thoracis cameram coarctans, figuram 1. Tab. I. ad impetus *Cantianos* optume exprimebat; Dum et caput reſerarem, Os verticis ſiniſtrum dextro, poſteriora verſus, productius, latius, atque interiore ſui parte curuum magis, hinc et altius, miratus ſum. Cranium, a poſtica conſpectum, obliquum ideo adparuit totum. Hemiſphaerium ſiniſtrum cerebri pariter ſe habebat ad dextrum.

Obſ. 2. Vir ſanus, aliquot, ſupra triginta, annos natus, atque ebrius, cadendo ex alto in plateam, ſtratam lapidibus, vulnus ingens ſuo impreſſerat capiti. Namque, vbi os verticis dextrum cum oſſe occipitis fere coniungitur, integumenta capitis fuere contuſa; quibus ablatis, cranium nudum viſum, atque fiſſura duplex: altera, vnciam longa, atque vertici propinquior: altera, dexterio-

ribus

ribus propior, vsque in futuram dexteram, quae cum sinistra Λ Graecorum aemulatur, continuabatur. Vnde futurae huius in se mutuo immissi denticuli ab arctiore amplexu recessserant. Vtraque fissura vero a futura, cui a sagitta nomen, fere aequidistabat vbique. Aeger hic, per omnem morbi decursum, mente constitit; nullis symptomatis adstantes terruit; quietus semper; rogatusque; omnia sibi dolere; regessit. Ast debilitas, quae corpus hominis, modo sani, adeo subito incesserat, erat oppido ingens. Quam, tam repentinam, dum meditarer; vt et statum aegri, inter cadendum ebrii; locum vulneris; fissuram geminam; atque impetum, quo cranium durum in renitentes lapides, adcelerato motu, impegerat: fusum, extra vasa, sub cranio, cruorem mente concepi facile. Salutis spem tantum non amputabat cerebelli vicinia ad loca fissa; nec non illa debilitas. Quocirca, trepanationis famae intempestiue parcens, ab aliis adeo commendatam medendi viam incedere constitui.

Illico igitur, ex secta vena, tantum sanguinis fusum est, quantum per debilitatem aegri licuit: capitique conuenientia adplicata sunt, et fomenta, et emplastra. Die morbi altero exhibitum fuit ex ialappae radice purgans forte; quod tamen ter tantum aluum soluit. Eodem, omnem adparatum, adplicatum capiti, abripere incepit decumbens. Die tertio, repetita fuit venae sectio: sed non adeo multus potuit extrahi sanguis. Versus vesperam, cibum potumque rogauit aeger. Die quarto, deglutiuit purgans, priori fortius. Sed immota stitit aluus; atque vulneratus, hora post meridiem quarta, quadam cum conuulsione ventriculi, exstinguebatur.

Aperui cadauer. Ac primo quidem ab integumentis vndique liberato cranio, fissuram illam duplicem spectaui. Illa, quam longiorem dixi, futuram deferens, pergebat ingens per totum dexterum latus ossis occipitis. Ceterum nullibi alia fissura exterius. Refecto cranio, supra duram matrem, sub fissurarum locis, plurimum erat extra vasa cruoris, *adeo congelati, et inspissati, vt durae matri, instar picis seu resinae, adglutinatus fuerit, vixque ferramentis et multo conatu hinc deradi ac remoueri potuerit.* Lustraui quoque integre perruptum magnum durae matris vas. Per omnem fusi cruoris plagam cerebrum complanatum erat, quasi manu illud complanasses. Cerebelli hemisphaerium dexterum quoque tegebatur concreto cruore: qui illud et compresserat aliquantum, et plane flaccidum reddiderat. Reliqua Εγκεφαλου bona. Visa hic iterum in caluariae intimis illa magna descripta fissura, per dextrum ossis occipitis latus, in vicinia ossis petrosi, procedens, illudque, vsque per dextrum magni occipitalis foraminis latus findens. In cranio autem interno alia fissura nulla. Thorax apertus nihil inconsueti monstrauit. Ast, recluso abdomine, cuius integumenta vndique sana conspiciebantur atque candida; mox in oculos incurrerunt dextrum corporis latus, sub illaeso iecinore, occupantia contusa intestina; atque ipse musculus Ψοας magnus dexter contusus. Reu dexter vero sanus erat. Arteriae totae erant cruore vacuae: sed in venis sanguis.

Ex qua historia, pace medicinam facientium, sequentes, non inutiles, deducam propositiones.

1.) A

1.) A compreſſione aliqua cerebelli debilitatem toti induci corpori. Quia cor inde fit debile.

2.) Debilitatem in homine, prius ſano, iam caput vulnerato, malum conſtituere ſignum; fereque notare fuſum, ſupra cerebelli partem, cruorem; ſi fuſi ſanguinis ſigna de cetero adfuerint.

3.) In vulneribus capitis pleraque adlegari ſolita extrauaſati cruoris ſigna abeſſe poſſe: eo tamen extra vaſa haerente.

4.) Circa effuſorum humorum in viuo corpore reſorptionem monenda quaedam eſſe; ſiue inſpiratura vaſa cogites; ſiue humorem inſpirandum. Venae inſpirant ſolae. Ad reſorptionem igitur innumerarum requiritur praeſentia: hauriunt enim oribus, ob paruitatem inuiſibilibus. Hae venae porro ſint bibaces. Tales fiunt euacuatae: nam repleta vena non bibit. Sed et in venarum villos ſufficiens neruei liquidi copia influere debet, per quod fiat impetus in venas; indeque in hauſta. Etenim vena mortua, vacua licet, humorem vel adtenuatiſſimum non haurit, niſi ad certum terminum, aeque, ac tubus capillaris. In has venas plerumque inſpirari debet effuſus cruor. Qui ergo ita adtenuandus, vt, roris, non ſanguinis, ſpecie, oſcula venarum, globulum rubrum capere neſcia, introire queat. Hic ſcopus eſt fomentorum atque emplaſtrorum adtenuantium, extra vaſa fuſis humoribus adplicatorum, ſemperque adplicandorum. Eamdem ob cauſſam, facillima fit in abdomine reſorptio: omnia enim ibi haerent in balneo naturae. Vid. *Obſ.* LXVI. *Ruyſchiana in Centuria.*

Quibus penſitatis, et cum praeſente hiſtoria collatis, ex alius errore proficiant Medici, inque faciunda medicina propoſitionibus determinatis pretium ſtatuere tandem incipiant. Quod ſi multas venas ad reſorptionem requiri intellexeris; impoſſibilem illam dices, cruore ſupra duram matrem fuſo. Venae enim ibi ſunt pauciſſimae, reſpectu aliorum locorum corporis. Sunt tamen plures in ſuturae vicinis. In cerebri intimis ideo fit facilior extrauaſati receptio. Quare ſtudendum certis ſignis, per quae noſcas effuſum ſupra duram matrem ſanguinem. Sed et venae huius aegri non potuerunt ſatis bibulae reddi. Etenim primo prohibuit ingens debilitas, quo minus ſatis euacuarentur; ſiue per ſectionem venae; ſiue per purgans. Vena ſecta hominis robuſti facilius magisque euacuatur, quam infirmi. Sed purgans, magna quamquam virtute praeditum, non ſoluet ſanguinem, niſi vi vitae fuerit actum. In debili ergo non agit, quod ſperaras: eoque agit minus, quo fuerit potentia validius. Quae omnia a priori certa ſunt. Certe; die altero purgans minus aluum ter luxauit: maius autem, ipſo emortuali die (quo vis vitae ſenſim decreſcebat, donec nihilo aequaretur) exhibitum, eamdem ne quidem tetigit. Secundo; quamquam omnia ad reſorptionem adcommodata hoc in aegro fingantur: debilior tamen ſpirituum in venas influxus eamdem impediuiſſet. Vltimo; in cranio eſt calor minimus; frigusque, debilitatis comes, non potuit ſatis adtenuare fuſum vel in abdominalibus cruorem. Amo febrem, quam alii adeo pauent, ſuccedentem contuſioni; ſi modo non furerit. Eſt enim ſingulare naturae inſtitutum, quo effuſos humores adtenuet, venasque ad bibendum incitet. Nec umquam reſoluta ſunt contuſa, ſine quadam febre.

5.) Ita-

5.) Itaque, humoribus in corpore, quacumque de cauſſa debili, effuſis; venae ſectione atque purgando nil proficimus.

6.) Trepanum igitur fuiſſe adplicandum aegro deſcripto. Licet et ab hoc dubia ſuiſſet ſpes; cum, quod cruor ſupra cerebelli partem haeſerit; tum, quod arctiſſima concreti cruoris ad duram matrem adhaeſio *trepanationis* cenſeatur *difficultas*.

7.) Doctrinam de *contrafiſſura* hoc exemplo non confirmari.

8.) Intima corporis contuſa eſſe poſſe, nullo ſigno externo conſpicuo. Hanc non vna didici obſeruatione. Circumſpectum igitur ſe gerat Medicus.

9.) Quodſi ſuſpicio adfuerit cruoris, a percuſſu extra vaſa in caput fuſi; e. g. ob magnitudinem ictus; locum vulneris etc., nec tamen ſequantur valde compreſſi cerebri effecta: ſignum habeni certum ſtagnantis ſupra-duram matrem ſanguinis: ſuſtinetur tunc ſanguis a membrana, in arcum extenſa. Vnde et alius durae matris vſus noſcitur; cur illa potius caluariae data ſit membrana, quam cerebro? Immo; obſeruationes eiusmodi elaterem membranae illius annon probant?

Obſ. 3. Diſſecui cadauer hominis, repente, vt aiebant, defuncti. In thorace pulmones vndequaque adnatos contuitus ſum ac contrectaui, e quorum ſuperficie plurima, eaque ſat magna, ſurrexerant tubercula, materiem continentia calcariam. Ad asperam arteriam erat anterius, praeciſe ſub initio oſſis pectoris, cartilagini exterius

adcretus tumor, nucis moſchatae figura et magnitudine, ſimilique foetus calciformi materie. Fini tumoris continuabatur bronchialis glandula. Diaphragma vero ipſum, inter pulmonem dextrum, illi continuum, atque iecur, totum tangebatur cartilagineum, vel oſſeum. Profecto; flexum frangebatur, cum ſonitu.

Obſ. 4. Homo, haud ita diu hydropicus, repente cadebat exanimis. Spectaui et huius interiora. In abdomine ſtatim occurrit praeuiſa aqua. Et pectus occupabat hydrops; pulmonesque vbique adfixi erant membranae, ſuccingenti coſtas; et quidem, ope fibrarum, albarum, elegantiſſimarum; raro viſarum *Lancifio*. Filamenta talia, pulmones illi membranae coniungentia, ſaepenumero obſeruaui in cadaueribus, quorum thorax aqua ſcatebat. Peruentum ad cor; certe ingens! Huius diſciſſa capſa, craſſitie dimidiam minimi digiti craſſitiem aequans, atque intus plurimis, iisque non exiguis, ſteatomatibus obſita, tantum capiebat cruenti laticis, quantum poterat. Cor ipſum paruum erat et maceratum; atque, ad locum medium ventriculi dextri, adnatum pericardio, carnis auxilio fungoſae, trianguli formam habentis, atque ex corde ſurgentis: forte non abſimilis illi, qua cordis mucronem defenſum viderat *Haruaeus*. *De generat. animal. exercit.* LI. In cauitatibus cordis erant polypi, per vaſa ſanguinea protenſi, vt vlnas metiri potuiſſes.

Repentinae huius mortis cauſſa ſat manifeſta.

Obſ. 5. Quod numquam inſpexit *Veſalius*, *iecur humanum in fibras aliquo pacto diuiſum*; ſemel inſpexi, dum,

dum, aperieus cadauer hominis adulti, modo ſani, et a temone, velocius decidente, lethaliter tacti, in manifeſtos lobos diſtinctum epar et contrectaui. Id patet ſequente adiectarum tabularum explicatione diſtincta.

TABULA I.

anteriorem epatis faciem repraeſentat.

A notat *portionem diaphragmatis*, *cum adnexo peritonaeo* reflexam, ſupra aliam, quae S ſignatur.

T notat *ligamentum*, quo diaphragmati adhaeret epar.

B eſt *lobus primus*, triangulum mixtilineum ſuperficie ſua exhibens, cuius cutua βασις ſub ſepti transuerſi parte, quam littera S indicaui, deliteſcit. A vicinis lobis diſtinctus eſt per ſciſſuras admodum profundas.

C *lobus ſecundus*, eiusdem fere cum primo figurae, ſeiunctus a lobis ceteris per inciſiones, ſuum verſus apicem profundas.

D *lobus tertius*; ſeu; *caput extorum*; variae, vt adparet figurae. Ad dextrum latus profundos obtinuerat limites.

E *lobus quartus*, ſiniſtram epatis partem fingens, qui, cum *quinto*, G, confluens, excurrit in *lobum ſextum*, F, μαχαιραν, pugionis vel cunei inſtar, immiſſum lobis, quos litteris, D et R, ſignaui.

H notat *veſicam bilis* inflatam, anterius aliquantum prominulam.

I eſt *locus inſertionis ligamenti umbilicalis*, in figura obſcurius aliquantum propoſitus.

L eſt

L eſt *lobus ſeptimus*; isque *aliformis*.

M eſt pars diaphragmatis atque peritonaei abſciſſi, vsque ad ligamentum vmbilicale excurrens.

N *lobus octauus*, e cuius medio enatum diaphragma, littera M indicatum. Pars media altera hic latet ſub elevato lobo L.

O *lobus nonus*; exiguus; ονυξ.

P *lobus decimus*; τραπεζα: cuius vera figura data, niſi, quod latera eius, verſus lobos B et O, rectilinea magis fuerint, quam depicta habentur.

Q *lobus vndecimus*.

R *lobus duodecimus*; qui altera τραπεζα.

TABULA II.

Sic dictam concauam epatis faciem ſiſtit.

L eſt *lobus alaris* Tab. I., cum eminentiis ſuis plurimis, ab inferiore parte ſpectatus. Immittit ſe ſub veſicula fellis. Sique ipſum ab hac parte integre prenſes: ad eumdem pertinere arbitraberis lobos, in Tab. I. depictos, atque deſignatos litteris, G, N, O, R.

H eſt *veſicula bilis*, turgida flatu.

A eſt *lobus inferior primus*; isque *mammiformis*.

E eſt *lobus quartus* Tab. I., ab hac parte viſus.

B *lobus ſecundus*; maximus. *Caput extorum.*

C *lobus tertius*. Τραπεζα.

D *Pars diaphragmatis et peritonaei.* In Tab. I. hanc notauit litera S.

G *Si-*

G *Sipho*, *per venam cauam traiectus*, viam huius per epar designans.

F *Venae portarum*, quae membranae pinguetudinosae adcreta vndique, ingressus in epar.

I *lobulus exilis*; quasi vna porta.

M *lobulus alius.* An porta altera? A vena portarum certe seiunctus spectatur, atque venae cauae valdopere adnatus, vt huius potius porta haberi possit, quam venae portarum.

Homo viuus de epate conquestus fuerat numquam; quantum rescire potui. Idemque, cultro diuisum, omnimode sanum sum arbitratus. An, in hoc epate, singularis fuit vasculorum directio, aliusque decursus, quam obtinere solet? Felix id reuelare potuisset iniectu. Talis modi epar, in scholis, inter malae conformationis opera refertur. Peruersus biliariae vesicae situs id poscit, inter alia. *Lusus naturae* vocatur talis productio ab iis, qui ludunt cum vocabulis. De cetero liquet, et antiquorum inquisitioni se offerre potuisse talia epata: aduersus quos acriter disputauit *Vesalius de hum. corp. fab.* Lib. V. Cap. VII.

Obs. 6. Situm *intestini duodeni* optume descripsit, suis in *obseruationibus Anatomicis*, *Santorini.* Sed, qui eumdem omnimode constantem existimant, siue repletus fuerit ventriculus, siue vacuus; siue denique sana fuerint ventriculus vel duodenum, siue morbis quibusdam obsessa: ii falluntur etiam atque etiam. Scribam, quae meis vsurpaui oculis. Principium duodeni adscendit, atque superius

eſt pyloro ventriculi, vel vacui, vel parum repleti. Contra; ventriculo repletiſſimo, fundus huius e diametro oppoſitus eſt ſpinae dorſi, atque duodeni initium eſt in plano, ad ſpinam dorſi orthogonio. Adcurate hoc videas in Fig. 1. Tab. I. ad *impetus Anatom. Cantianos*. Sic natum inteſtinum, flexuoſo ductu, ſe immittit quaſi in cauum quoddam, factum, ſiniſterius, a parte omenti, a ventriculo ad epar euntis; ſuperius, a parte concaua iecinoris, praeciſe infra ligamenti vmbilicalis inſertionem in epar; et, quoad circumferentiam dexteriorem, a veſicula fellis, colo, atque rene dextro. Tumque, renem deferens, incedit incuruum ſupra muſculum ψοας magnum, truncum venae cauae, atque venam emulgentem dexteram. Dein progreditur transuerſim. Vbi fere ad ſpinam dorſi peruenit, caudicem venoſum meſeraicum, ad epar euntem, incumbentem ſibi ſentit. Hunc ſemel vidi confectum a duabus venis, ad acutum ſibi iunctis, quarum ſiniſterior erat arctior dextra. Anguli huius vertici inſerebatur vena exigua, a ventriculo deſcendens, ex quo exiuerat bifida. Haec omnia vere viſa ſunt atque elegantius, quam exhibentur quodammodo a *Veſalio* (*a*). Hunc eumdem caudicem alias vidi genitum a tribus ramis, biſurcatis omnibus, atque poſt in infinitum diuiſis, quorum medius erat capaciſſimus, ſiniſter autem dextro capacior. Magnus hic venae portarum ramus, ita confectus adſcendit, donec eum oculis ſubducat το παγκρεας. Hoc enim deſcriptum caudicem, ſupra duodenum, conſtanter amplectitur, figura ſemicirculari. Quam *circumferentiam pancreatis* emenſus ramus, venam lienarem adcipit,

(*a*) Fig. XII. Lib. V. infra K.

cipit, poſteaque, venae portarum titulo, ſub initio duodeni, atque fine ventriculi, ad iecur tranſit. Duodeno inteſtino incumbunt porro, iuxta ſiniſtrum latus deſcripti caudicis, rami ſuperioris arteriae meſeraicae; quales aliquando quatuor numeraui (*b*). Inteſtinum a ſpina dorſi poſtea demittitur in cauum ſiniſtrum abdominis, per eamdem ſpinam diuiſi. In quo adſcendens, meſocolon mox transit, nomenque mutat. Initium duodeni fere ſemper deprehendi a veſicae bile flauum.

Diuerſum inteſtini duodeni ſitum offendi alias. Vomitus, fere continuus, nulla arte ſedandus, enecabat hominem, phthiſici ſpeciem exacte qui referebat. Huius in cadauere, ventriculus ſpectabatur oblongus, ſed coarctatus, ſolum ſiniſtrum hypochondrium, ſitu normali, occupans: prout quandoque obſeruatus eſt in voracibus. Ex hoc enatum duodenum adſcendebat pyloro ſuperius; tunc aliquantum procedebat, recta via, epatis dextram verſus: dein magis adſcendens, inflectebatur; deſcendebat; poſteaque via, rurſum recta, pertingebat ad veſiculam bilis; tandemque, conſueta curuatura abſoluta, ſolitum iter proſequebatur. Quae plura obſeruabantur, addam; licet ad argumentum de duodeno non pertineant. In ventriculo offendi ſciſſuram, quam cultro factam eſſe, ſacramento pernegabat proſector, expertus, atque fide dignus. In abdomen ſaltim nihil effluxerat ex ventriculo. Id eſt certiſſimum, ventriculum hunc manifeſte fuiſſe eroſum, ac praecipue in parte, oppoſita fundo. Eroſiones autem hae non erant, niſi retroceſſiones membranarum, intimae atque nerueae. Rem expertus ſum liquidam, ope ſcul-

(*b*) *Veſal.* l. c. litt. ζ, in *delineatione aortae.*

pelli. Inde, ad erosa loca, rugae nullae: intacta vero tegebantur copiosissimis.

Obs. 7. In cadauere hominis, asthmate, per biennium, qui laborarat; praeter serum, in caput, (vnde cerebri erosio) vtramque pectoris cauitatem, atque pericardium, largiter fusum; abdomen distentum erat, quasi a capto veneno. Ventriculus, cibum complexus, atque duodenum siderata conspiciebantur. Sed ventriculum, epar non contingentem, numquam lustraueram ante. Nempe, inter vtrumque viscus, sese insinuauerat magna inflati coli pars.

DE

DE MVTATIONIBVS CALORIS ET FRIGORIS AQVAE FLVENTIS OBSERVATIONES.

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

I. INSTITVTI RATIO.

ANimus est, experiri, quaenam incrementa et decrementa patiatur aqua naturalis, intra alueos ex. gr. fluuii Neuae fluens. Notum est: aquam vi ignis ad constantem gradum caloris deduci posse; sed diminui illum iterum, et frigere aquam, cum aeri exponatur, vel artificiale refrigerium excitetur similiter ad gradum aliquem, cuius limites si frigus excedat, aqua non amplius aqua manet, sed in glaciem conuertitur. Non dubitandum igitur, quin aqua pro diuersa constitutione aeris incumbentis, illamque nonnumquam voluentis et miscentis, aliquibus mutationibus obnoxia sit. Quantae autem istae mutationes sint, nondum determinauerunt, quantum noui, Physici. Prima quidem fronte apparet, tale experimentum praeter simplicem cognitionem huius variae affectionis, nil vtilitatis afferre: Cum vero aqua talis, qualis in hoc nostro flumine continetur, etiam ita frigide hausta plurimorum vsui inseruiat, et corporis humani viscera, queis ingeritur, miris caloris et frigoris vicis-

ſitudinibus ſubiecta ſint: crediderim, laborem non inutilem fore Phyſico, et ſi nil aliud, cautelas certe quasdam, in vſu frigidae obſeruandas ſuppeditaturum, et cauſſas reuelaturum exactius, quare hauſtus frigidae vel balnea nonnumquam tam miros effectus in corpore noſtro producant.

Thermometrum, quo vtor, ſuppeditauit mihi Cl. *Dn. Pr. De L'Isle* ſua methodo confectum (*). Conſtat autem ex cylindro vitreo ampliore, in tubum anguſtiorem longum deſinente, et repleto Mercurio qui ad minimum attactum vel halitum ſatis ſenſibiliter aſcendit et deſcendit. Haec diuerſa altitudo ad ducentos gradus eſt redacta numerando ab altitudine ſumma ad imam. Gradus vltimus denotat contractionem maximam Mercurii, quam paſſus eſt hieme praeterita d $\frac{16}{26}$. Ian. hora ſept. mutat. 1733; primus autem denotat calorem, quem accepit Mercurius ex aqua bulliente.

Methodus experiundi haec eſt: Obſeruo tribus vicibus quotidie, Sole orto, circa Meridiem, et ſub veſperam primo quae ſit altitudo Mercurii in tubo, dum expoſitus eſt aeri quieto, in loco, aperto quidem, ſed quo nec Sol, nec ventus tam facile penetrat: deinde aufero Machinam, et appendo ad brachium, cuiusdam Trabis portatilis vt a ſolo aere ambiri poſſit, et ſi ventus eſt, ſimiliter illi directe expono. Etiam ſolis ſplendentis nonnumquam vires experior. Quo facto inſtrumentum immergo aquae, cuius gratia foramen proprium glacici incidi curaui, quod quantum poſſibile eſt, apertum ſeruo. Cumque res ad eundem laborem recidat, ad tempeſtatis quoque variationes attendo.

II. OB-

(*) Vid eius Memoires pour ſervir a l'hiſtoire & au progres de l'Aſtron. de la Geogr. & de la Phyſique pag. 267.

II. OBSERVATIONES.

D. 9. Febr. 1734. Mane ſereno, Ventus NW. Mercurius erat altus in aere quieto gr. 166; in aere libero poſt horam gr. 161. vento expoſitus gr. 166. aquae immerſus aſcendit ad gr. 152. ſiue machinam totam ſiue ad partem immerſerim, aqua erat paulum glacie obducta, vt purgare opus eſſet. Extracto thermometro humiditas adhaerens momento in glaciem verſa eſt.

Meridies ſerena, ventus fortis. Mercurius in aere quieto gr. 155. vento expoſ. gr. 166. aquae immerſus gr. 152. nec vlterius aſcendit cum per aliquot minuta ſoli exponeretur in aere quieto. Humiditas denuo in cruſtam verſa. Flumen altum iterum decreſcit.

Sub occaſum ſerenum, ventus non tantus. Mercurius in aere quieto gr. 165. in aere libero gr. 168. in aqua gr. 152. Fluuius receſſit.

D. 10. Febr. Sub ortum non adeo ſerenum Mercurius in aere quieto gr. 175. vento leni W. expoſ. gr. 176. aqua immerſ. gr. 152. Quia gradus caloris aquae ſemper idem, volebam experiri, an non in tubo circa illum locum reſiſtentiae quicquam eſſet: pepuli igitur in loco calido mercurium ad gr. 80, et ita immerſi aquae: deprehendi autem labi iterum mercurium vsque ad gr. 152. hoc tamen cum diſcrimine, vt mutatio ex calido in frigidius multo tardior eſſet, quam ex frigido in calidius, ſiue citius aſcendit mercurius in aqua, quam deſcendit. Experimenta deinde feci in loco magis aprico, ſed phaenomena erant eadem omnia.

Sole

Sole medio, ſereu. Thermometrum in aere quieto indicat gr. $155\frac{1}{2}$. vento expoſ. W. mediocri gr. 170. aquae immerſ. gr. 152.

Veſpera ſerena, aer quietus, Thermometrum in aere quieto gr. 170. in libero gr. 173. in aqua gr. 152.

D. 11. Febr. Mane Coelum nubilum, Thermometrum in aere quieto gr. 168. in libero $168\frac{1}{2}$, vento expoſitum gr. 170. aquae immerſ. gr. 152.

Meridie, ſol vix penetrat, ſubinde nubila, ventus O. fortis; Therm. in aere quieto 162. vento expoſ. per ſemihoram gr. 165. in aqua gr. 152. Veſperi non obſeruaui, erat autem frigus ventusque vehemens.

D. 12. Febr. Mane. Ventus NO. paucus. Therm. in aere quieto gr. 168. in libero gr. 170. in aquam immerſ. gr. 152.

Meridie, in aere quieto Therm. gr. 166. in libero gr. 167. in aqua gr. 152.

Nocte hora nona et decima erat Mercurii altitudo in aere quieto 170. in libero 173. in aqua 152. Coelum ſerenum, lux borealis magna.

D. 13. Febr. Mane ſpiſſa eſt nebula, Thermom. in aere quieto gr. 180, in aperto gr. 181. poſt ſemihoram autem 179. in aqua autem gr. 152.

Meridie disiecta nebula maximam partem, ſol transparet; Thermometrum in aere quieto gr. 154. in libero gr. 155. vento expoſ. gr. 157. aquae immerſ. gr. 152.

Veſperi

Veſperi, Thermom. in aere quieto gr. 170. poſt horam gr. 176. Nox frigidiſſima, vt nolim experimentum in aqua capere.

D. 14. Febr. Mane nubes, cum niue pauca. Mercurius in Thermom. in aere quieto. gr. 170. in libero gr. 167. in aqua 152.

Meridie in aere quieto gr. 164. in libero $164\frac{1}{2}$. in aqua gr. 152.

Veſperi, Thermometrum in aere quieto gr. 162. in libero gr. 163. in aqua gr. 152.

D. 15. Febr. fere toto die ningit, ventus nullus, Thermometrum in aere quieto gr. 158. in libero gr. 157. in aqua gr. 152.

Meridie, Thermometrum in aere quieto gr. 155. in libero gr. 156. in aqua gr. 152.

Veſperi, Thermometrum in aere quieto et libero eſt ad gr. 156. in aqua autem gr. 152.

Perſtitit Mercurius in Thermometro in aqua ad gr. 152. vsque ad illud tempus, quo fluuius glacie ſua liberabatur, quod factum d. 16. 17. 18. Aprilis; poſtmodum vero incepit mutari ſenſim ſenſimque, ita vt d. 26. 27. 28. April. eſſet circiter gr. 148. 149.

D. 1. Mai. Therm. in aqua erat ante meridiem, gr. 148. coelo nubilo, imbres nonnumquam ſpargente, in aere 135. grad. Poſt meridiem venit glacies ex lacu ladoga, tanta vi, vt pontem nouum rumperet, aer erat veſperi 144. gr. Experiri erat animus, num haec glacies mu-

tationem quandam afferret, et deprehendi aquam gr. 151. et ſi quando fruſtum glaciei in viciniam inſtrumenti affluereť, erat gr. $151\frac{1}{2}$. hoc eſt, quam proxime acceſſit ad frigus ſummum, cuius aqua hyeme capax erat.

D 2. Maii. Thermom. in aere quieto eſt gr. 142. in libero 140. aer eſt tranquillus ſine omni vento, coelum nubilum rorem pluuioſum ſpargens, glacies continuat, ſed prope ripam alteram. Ceterum circa ripam natant quaedam glaciei particulae, et adhuc dum eſt aqua gr. 151. circa decimam ſurgit Ventus W.

Circa meridiem ſerenat, Therm. in aere quieto gr. 132. In Sole gr. 119. in aqua, cui adhuc glacies innatabat, gr. 151.

D. 3. Maii. Thermom. in aere quieto mane 130, in ſole 122. circa meridiem in aere quieto gr. 123. in ſole gr. 116. in aqua gr. 150. NB. Dies ſerenus, circa meridiem nubes pluuioſae vagantes, Ventus fortis S. Glacies circa ſextam matutinam deſiit fluere. Veſperi coelum obſcurum, Therm. in aere libero gr. 135.

D. 4. Maii. Mane, pluuiola, Ventus nullus, Therm. in aere libero gr. 138. in aqua gr. 149. mox ingruit pluuia. Thermom. in aere pluuioſo gr. 136. pluuia continuat ad meridiem vsque cum vehementi vento ex W. ita vt fluuius ad quatuor pedes altior creſceret, cecidit interea Mercur. in Thermometro ad quartam horam vsque ad gr. 142. veſperi poſt occaſum ad gr. 144. in loco quieto; in aqua eodem tempore erat gr. 148. citius enim ob altitudinem fluminis accedere non poteram.

D. 5.

D. 5. Maii. Serenum, Therm. in aere quieto gr. 140. in libero vento W. expoſ. gr. 142. in aqua gr 148.

Circa meridiem nubila vagantur, Thermom. in aere gr. 130. in ſole gr. 125. in aqua, flante N O. paruo, gr. 147.

Veſperi in media pluuia gr. 140.

Sub occaſum gr. 145. in aqua gr. 147.

D. 6. Maii. Ventus W. nubes vagantes. Thermom. in aere quieto gr. 145. in libero et vento expoſ. gr. 146. in ſole gr. 135. in aqua gr. 147.

NB. Cum hodie in platea veherer verſus ſolem, ille me vehementer vrebat, a tergo autem grando cadebat.

Meridie in aere quieto 138. in libero aere gr. 139. in ſole gr. 129. in aqua aeſtuante a vento W. et alta gr. 146.

Poſt occaſum, Ventus W. deſinit, ſurgit N O. Thermom. in aere quieto gr. 145. in aqua ſatis placida gr. 146.

D. 7. Maii. Mane, ventus nullus. Thermom. in aere quieto gr. 142. in libero, ſeptentrionem verſus gr. 144. in aqua gr. 147. in ſole per nubeculas vix non transparente gr. 132.

Meridie in aere quieto (vento S W. pauco) Therm. gr. 127. in aere ſeptentrionali gr. 137. in aqua gr. $146\frac{1}{2}$. in ſole gr. 117.

Veſperi in aere libero gr. 140. in aqua 147.

D. 8. Maii. Therm. in aere quieto 132. in libero gr. 133. in aqua gr. 148.

Meridie in aere quieto gr. 125. in ſole gr. 117. in aqua gr. 148. Pomeridie in ſole gr. 123. ſed ſol transparet per aerem nebuloſum in aqua gr. 148.

Dum miror, quare aquae calor decreſcat, cum tamen aer ſit placidus, tranquillus, calidus ſine omni cruditate, ventus lenis S W. et in cauſſam inquiro: obſeruo deſtructam eſſe machinulam.

Poſtquam alia parata fuit, redii ad labores meos, et inueni

D. 7. Iunii. Therm. in aere aprico, nubibus ſparſis, vento forti N O. humili aqua, gr. 115. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

D. 8. Iunii, nebuloſae nubes tranquillae, hora octaua Therm. in aere quieto aperto gr. 129. in ſole transparente continuo per ſemihoram gr. 109. in aqua $128\frac{3}{4}$.

Poſt meridiem, hora ſecunda, Ventus aliqualis W, coelo clariſicato, Therm. in aere quieto gr. 108. in ſole per duo minuta gr. 103, in aere vento expoſ. ſine ſole per tria minuta gr. 118. in aqua gr. 128.

Poſt occaſum, horizonte ſeptentrionali valde nubilo, Therm. in aere aprico gr. 128. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

D. 9. Iunii. hora octaua, Vento S O. Coelo nubilo, Therm. in aere quieto gr. 121. in ſole gr. 120. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

Meridie, ventulus S W. pluuiola, Therm. in aere libero gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128.

Pome-

Pomeridie continuo haeret circa gr. 122, mox ſupra mox infra. Hora octaua gr. 123. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

D. 10. Iunii. Summo maue, extra ſolem erat Therm. gr. $123\frac{1}{2}$. hora octaua, coelo vdo, ſereno, tranquillo gr. 115. in aqua gr. 128.

Meridie in ſole gr. 100. in aere ſine ſole gr. 110. in aqua gr. 127.

Pomeridie extra ſolem verſatur intra 115. et 120. in aqua $126\frac{2}{3}$.

Veſperi in aere Therm. gr. 125. in aqua gr. 127.

D. 11. Iunii. Mane hora ſexta coelum ſudum, ſine vento. Therm. in aere aprico gr. 110. in aqua 127.

Hora vndecima Therm. in aere libero, ſine ſole gr. 100. in aqua gr. 126. Hora duodecima, nubes ſparguntur, quae traiectum ſolis nonnumquam impediunt, cadit igitur Therm. in aere libero ad gr. 105. Hora prima, in ſole gr. 95. mox redeuntibus nubibus ad gr. 107. ſurgit ex S. ventus mox in NW. mutatus.

Veſperi poſt occaſum, coelo nebuloſo Therm. in aere gr. 125, in aqua gr. 126. Ambo dies calidiſſimi.

D. 12. Iunii. nocte antecedente pluit, mane nebuloſum pluuioſum, Therm. in aere libero gr. 132. in aqua gr. $126\frac{1}{2}$.

Meridie, Ventus N. fortis ſurrexit, nubes, pluuiola, Therm. in aere quieto gr. $130\frac{1}{2}$. in aqua gr. 126.

Auctum eſt frigus pomeridie ſenſim ſenſimque vt eſſet veſperi hora octauo Therm. gr. 134. in aqua gr. 126. Ventus N. Nil igitur de calore amiſit aqua.

D. 13. Iunii. hora ſeptima Therm. in aere quieto gr. 125. NB. aer reuera temperatior eſt, coelum potiſſimam partem purum, in aere libero poſt ſemihoram gr. 122. in aqua gr. 128.

NB. Si inſtrumentum aqua eximo, cadit adhuc Mercurius, tam dum teneo in aere ſupra aquam quam intra domum. Sine dubio ille aer adhuc frigus ſuum retinuit ab heſterna die, nec ſolis energiam expertus eſt, vti ille, in quo Thermometrum obſeruare ſoleo.

Meridie, Therm. in aere quieto gr. 115. in ſole gr. 110. in aqua gr. 127. ſi adhucdum eximo, cadit. Ventus fortis W. vt creſcat aqua.

Veſperi, Thermom. vento expoſ. magno W. gr. 130. in aqua gr. 128.

D. 14. Iunii. Mane, ventus W. fortis, nubes vagantes, Therm. in aere quieto erat gr. 128. in aere ſupra aquam vento expoſ. gr. 132. in aqua gr. 129. neceſſe igitur poſt extractionem iterum cadit. Bene attendendum igitur mihi in poſterum ad calorem aeris ſuper aquam.

Meridie, W. continuat, nubibus vagantibus, Thermometrum in aere quieto gr. $120\frac{3}{4}$. in aere ſeptentrionali vento expoſ. cadit intra minutum dimidium ad gr. 127. intra horam gr. $131\frac{1}{2}$. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$.

Veſperi in aere ſeptentr. vento expoſito, ventus W. fortis Therm. gr. $132\frac{1}{4}$. aqua gr. $128\frac{1}{4}$.

D. 15. Iunii. Mane hora ſexta Thermom. in aere quieto gr. 135. poſt horam, gr. 128. ſuper aqua per minutum gr. 130. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. Ventus W. nubes multae vagantes.

Meri-

Meridie, Thermometrum in loco quieto gr. 118. in aere meridionali aperto, ſed extra ſolem gr. 121. verſo inſtrumento in ſole per 7. minuta aſcendit ad gr. 115. in loco ſeptentrionali vento W. expoſitum per ſemihoram gr. 129. in eodem loco, ſed a vento verſum gr. 130, alio loco ſeptentr. ſed quieto gr. $128\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128. Iam ventus mutatur verſus S.

Veſperi, Therm. in aere quieto ordinario eſt ad gr. 131. in libero meridionali gr. 130. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. Ventus S W. ſed paululum ſenſim minuitur.

D. 16. Iunii. Mane hora ſeptima, Therm. in loco quieto gr. $128\frac{3}{4}$. in loco a ſole irradiato, ſed a ſole verſum Thermometrum per ſemihoram gr. 128. in aere ſuper aqua gr. 128. ſuper aqua, ſed in longiore a ripa diſtantia gr. $128\frac{1}{2}$. in aqua gr. 129.

Meridie in loco quieto gr. 111. in irradiato auerſum gr. 115. in ſole gr. 110. ſuper aqua gr. $128\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128.

Veſperi in loco quieto gr. $127\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $128\frac{1}{2}$. in aqua gr. 128. Tota dies amoena, quieta, ſerena.

D. 17. Iunii. Mane, S W. Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. $126\frac{1}{2}$. in aqua gr. $128\frac{1}{4}$. Mane clarum.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 110. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. 128.

Veſperi in loco aperto gr. 115. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$. Tota dies amoena ſerena.

D. 18.

D. 18. Iunii. Pluuia. Therm. mane in loco quieto gr. 125. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $127\frac{3}{4}$.

Poſt meridiem hora tertia Therm. in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr 122. in aqua gr. 127. S W. ſerenaſcit.

Veſperi in loco quieto Therm. gr. 125. ſuper aqua gr. 125–126. in aqua gr. $127\frac{2}{3}$. Seren. Tranquill.

D. 19. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 123. in loco irradiato, auerſim gr 123. ſuper aqua gr. 129+. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. ventus NO. frigidiuſculus. Seren.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 111. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$.

Veſperi ante ſolis occaſum in loco aperto Therm. gr. 127. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr $127\frac{1}{4}$.

Tota dies maximam partem ſerena & tranquilla.

D. 20. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. $114\frac{1}{2}$, in loco irradiato, ſed auerſim gr. 108. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 127. Coelum ſerenum, tranquillum.

Poſt meridiem hora quinta Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $125\frac{1}{2}$.

Veſperi in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 127, in aqua gr. $125\frac{1}{2}$.

Pomeridie toto ventus magnus W. ʒu N. qui aeſtum aeris inſignem paululum repreſſit.

D. 21. Iunii. Mane ſereno Therm. in loco quieto gr. 118. in aqua gr. 126.

Pomeridie in loco quieto gr. 105. in ſole per quinque minuta gr. 95. in aqua gr. 125.

D. 23.

D. 23. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. in aqua gr. $124\frac{1}{4}$. ventus O. ſeren.

Meridie in loco quieto gr. 108. in ſole gr. 100, extra ſolem gr. 115. in aqua gr. $123\frac{1}{4}$. Seren. ſed ventus O. facit aerem frigidiuſculum.

Veſperi in loco quieto Therm. gr. 125. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$.

D. 24. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. in aqua gr. 124. ſerenat. Ventus paruus SW.

Meridie in loco quieto gr. 108. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$. aer frigidiuſculus ventus W. zu S. fortior. Coelum nubibus ſparſis non adeo ſerenum.

Veſperi in loco quieto gr. 123. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. $123\frac{3}{4}$.

D. 25. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. $124\frac{1}{4}$.

Meridie in loco quieto gr. 99. in ſole per ſemihoram gr. 94. ſuper aqua vltra gr. 116. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

Aeſtus intenſiſſimus. Nubes fere nullae. Ventus NO. vtut vix perceptibilis nihilominus tamen refrigerium gratiſſimum affert.

D. 26. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 103. hora nona, ſuper aqua circa gr. 120 in aqua gr. 122. Aeſtus ſummus, coelum ſudum, ſine nube.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 99 in ſole per ſemihoram gr. 92. ſuper aqua circa gr. 116. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 121. ſuper aqua gr. 121. in aqua ipſa gr. 122.

D. 27. Iunii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 108. ſuper aqua circiter gr. 120. in aqua gr. 122.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 96. in ſole gr. 89. ſuper aqua gr. 113. ad 114. in aqua gr. 121.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121.

Totus dies aeſtuoſiſſimus, ſtriae nubeculoſae hinc inde apparent, ſine vento. Veſperi nubes vel potius nebulae ſpiſſiores ſurgunt cum ſole rubro.

D. 28. Iunii. Mane, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 116. hora ſeptima gr. 112, hora octaua gr. 108. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $120\frac{5}{6}$.

Veſperi in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $119\frac{1}{4}$. hodie ventus W. fortior, ſeren.

D. 29. Iunii. Mane, hora nona, Thermom. in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. ſeren. ſed frigidior heſterno aere, Ventus tamen S.

Meridie, Nubes pluuioſae, Ventus fortis S W. Therm. in loco quieto gr. 107. ſuper aqua gr. 114-115. in aqua gr. $120\frac{5}{6}$.

Poſt meridiem pluuia ingens exſurgit cum Tonitru vnico. Thermom. in aere, pluuiae expoſitum gr. 119. Poſt pluuiam per tres horas gr. $118\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121. veſperi in loco aperto gr. $117\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. Coelum quietum. Aer adhuc dum calidiuſculus.

D. 30. Iunii. Mane pluuioſum. Ventus NO. deinde verſus ad N. Therm. in loco quieto gr. 123. pluuiae

uiae expoſitum et vento ſeptentrionali gr. 127. ſuper aqua gr. 127. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$.

Meridie cum paululum inclareſcere videretur, Thermom. in loco aperto gr. 123. cum denuo plueret gr. 127.

Veſperi hora quarta in loco aperto gr. 126. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Ergo per 24. horas, nimium aucto frigore, et aere mutato ad gradus 10. nil immutatus tamen aquae calor eſt.

Poſt occaſum in loco quieto Therm. ad gr. $126\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 125-126. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. ſerenaſcit. Ventus minor quantitate, ſed idem plaga.

IVLIVS.

D. 1. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 123. in aqua gr. 122. Ventus O. ſed nubes contrario ordine.

Meridie eodem vento totum coelum ſerenum, mox nubes pomeridie vagantes. in loco quieto Therm. gr. 114. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 125. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 122. Malacia.

D. 2. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$. Tranquillus et ſerenus aer.

Ante meridiem ſurgunt nubes.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 111. ſuper aqua gr. 123-124. in aqua gr. $122\frac{1}{4}$. ventus lenis NO.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 125. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 122.

D. 3. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 125 ſuper aqua gr. 124-125. in aqua gr. $123\frac{1}{4}$. Aer tranquillus frigidiuſculus vti in autumno eſſe ſolet, nebuloſus. Toto antemeridiano tempore ſol hinc inde per nubila ſplendet.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 114. mox oritur nubes pluuioſa cum tonitru. Therm. eſt gr. 120. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 123.

Obſeruo ex perpetua circumgeſtatione machinulae vincula tubuli relaxari, vt non ad eandem altitudinem ſemper conſiſtat. Curaui igitur, vt inferius repagulum affigeretur, ne altitudo tubi quicquam immutari poſtea poſſet.

Poſtquam recepi inſtrumentum, ad obuerſationes redeo.

D. 8. Iulii. Veſperi, Ventus O. exiguus. Coelum ſerenum Therm. in loco aperto gr. 125. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 121.

D. 9. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 116. in loco ſeptentrionali aperto gr. 122. ſuper aqua gr. $121\frac{1}{2}$. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Ventus N. Poſt ſummam ſerenitatem ſpiſſae nubes ex N. veniunt.

Meridie in loco quieto erat Therm. gr. 114. Oritur pluuia, ceſſante vento. In pluuia Therm. gr. 121. poſt pluuiam gr. 118. in aqua gr. $120\frac{1}{2}$.

Veſperi, Coelo tranquillo nubeculis tecto Therm. in loco aperto gr. $123\frac{3}{4}$. in loco ſeptentrionali gr. $123\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $123\frac{1}{2}$. in aqua gr. $120\frac{3}{4}$. ventulus N. exurgit.

D. 10.

D. 10. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 123. in aqua gr. 121. Coelum nubilum. Ventus N. aer frigidiuſculus.

Poſt meridiem, Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 122+ in aqua gr. $120\frac{2}{3}$. Aer frigidiuſculus ob ventum fortem NO. Nubes ſpiſſae pluuioſae, ſerenitatem interrumpentes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. $123\frac{1}{2}$. in aqua gr. 121. ſerenum, crudus aer, ventus NO.

D. 11. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 114. ſuper aqua gr. 122-123. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. Tempeſtas heſterna, Ventus O.

Meridie, Thermometrum in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Tempeſtas paulo mitior, ventus O. lenis, nubes pluuioſae ſerenum coelum hinc inde tegentes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 123. ſuper aqua gr. $122\frac{1}{2}$. in aqua gr. $121\frac{1}{4}$. Tempeſtas eadem.

D. 12. Iulii. Mane, Thermometrum in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. $123\frac{1}{4}$. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. ventus nullus, aer frigidiuſculus, pluuiola.

Poſt meridiem, Therm in loco quieto ordinario gr. 106. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $120\frac{1}{4}$. Toto hoc die ventus lenis SW. ſed nubes, tonitru praegnantes curſu contrario ambulant. Obſeruo etſi aer ſit calidior aqua, mercurium tamen, momento quo extraho, paulum cadere, id vero ſine dubio a dilatatione vitri dependere debet.

Veſperi, Thermom. in loco quieto gr. 123-24. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $120\frac{3}{4}$. Coelum varium.

D. 13. Iulii. Mane, Therm. in aere quieto gr. 122. ſuper aqua gr. 121-122. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$. Nebula ſine vento. Hora octaua nebula diſcutitur, et Therm. in ſole per minuta tria gr. 105. Meridies calidiſſima.

Veſperi, Therm. in aere quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. 121. Veſper placidiſſimus.

D 14. Iulii. Mane, ſeren. ventus S W. Therm. in aere quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 119. in aqua $120\frac{3}{4}$.

Poſt meridiem, hora quarta, Therm. in loco quieto gr. 108. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $119\frac{3}{4}$. ſerenitas, W. nubes vagantes.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 118. ſuper aqua gr. 118. poſtquam immerſum fuerat aquae, et exemptum denuo ſibi relictum gr. 120. circiter; in aqua gr. 120. ventus deficit.

Ex hac obſeruatione video, me numquam ſatis accuratum gradum caloris aeris ſuper aqua expiſcari poſſe, ſed, dum Thermometrum ſuo ligno affixum eſt, ſemper adhuc aliquem calorem a ligno accipit, ſi illud antea in aere ſicco aut plane irradiato conſtiterat. Si vero lignum aquae immerſum fuit, tum et illud ſuum priſtinum calorem in aqua amittit, nec quicquam Thermometro communicare poteſt.

D. 15. Iulii. Mane, poſt nubila ſerenitas tranquilla, Thermometrum in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 119-120. in aqua gr. $120\frac{2}{3}$.

Meridie,

Meridie hora ſecunda, Therm. in loco quieto gr. 104. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. $119\frac{1}{4}$. nubes, aer non adeo purus, hinc aeſtus ſolis per vapores eo penetrantior. Ventulus S.

Veſperi poſt occaſum, Therm. in loco quieto gr. $116\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $119\frac{5}{6}$. ſuper aqua etiam omnes eosdem gradus 118. 119. etc. retinet, quos in aqua obtinet, ſi ſucceſſiue extraxeris et immerſeris.

D. 16. Iulii. Mane hora ſeptima ſerenum, tranquillum, Therm. in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $120\frac{1}{6}$.

Aeſtus intenſus, ventulus S. Nubes interdum ſolem occultantes.

Meridie, hora ſecunda, Therm. in loco quieto gr. 99. ſuper aqua gr. $112\frac{1}{2}$. in aqua gr. $118\frac{2}{3}$. in ſole gr. 87.

Ventulus variat, nunc auſtralis, nunc occidentalis. Therm. hora ſexta gr. $118\frac{1}{3}$.

Veſperi Nubes coelum plane obducunt, ventulus idem, Therm. in loco aperto gr. 117. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $118\frac{2}{3}$.

D. 17. Iulii. Mane, hora ſeptima nubes, ventulus S W. Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $119\frac{1}{2}$. Hora nona, nubes hinc inde diſpercunt. Therm. in loco aperto gr. 110. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $119\frac{1}{4}$.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 106. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $118\frac{1}{3}$. Ventus S W. fortior. Nubes, ſol.

Pomeridie ventus fortis W.

Veſpe-

Veſperi ventulus S. deficit ſenſim, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 121-122. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$.

Dies aeſtuoſus, ni ventus temperaſſet aerem.

D. 18. Iulii. Mane, hora ſexta, Coelum nubilum, ventus W. Therm. in loco quieto gr. 122. ſuper aqua gr. $122\frac{1}{2}$, in aqua gr. 120.

Poſt meridiem, Therm. in loco quieto gr. 112. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$. ventulus W. frigidiuſculus.

Veſperi, nubes coelum tegunt, Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $119\frac{1}{2}$.

D. 19. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 120. nubes pereunt, coelum ſerenum, calidum.

Meridie, hora tertia, Therm. in loco quieto gr. 107. ſuper aqua gr. 111-112. in aqua gr. 118. nubes redeunt. Hora quinta oritur ſubito turbo vehementiſſimus ex W. nubes infimae ſequebantur eius directionem, ſuperiores autem retinebant adhucdum curſum ex SW. Remiſit ſenſim ventus, et terminatus eſt pluuia. Therm. ſenſim cecidit, vt eſſet

Veſperi, hora octaua, Therm. in loco aperto gr. $121\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $121\frac{1}{2}$. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$.

D. 20. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 120. poſt horam in ſole gr. 100. in aere ſeptentrionali gr. 122. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 119. Ventus frigidus N. aer ſerenus, flumen altum.

Meridie,

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 96. ſuper aqua gr. 113. in aqua gr. $117\frac{3}{4}$. flumen altum.

Veſperi poſt occaſum, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. aqua cecidit. Ventus plane remiſit.

D. 21. Iulii. Mane, hora nona, Therm. loco quieto gr. 113. ſuper aqua gr. 121-122. in aqua gr. 119. Ventus O. Seren. Nubes.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 107. in ſole gr. 101. in aere ſeptentrionali gr. 118. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$. Ventus O. aeſtum ſolis reprimit. Seren.

Veſperi, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 120. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. Ventus O. Nocte Therm. gr. 124.

D. 22. Iulii. Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. 120. Ventus O. frigidiuſculus ſeren.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 105. in ſole gr. 100. ſuper aqua gr. 110. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. Ventus O. ſeren. nubes ſpiſſae, vagantes.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. poſtquam extractum erat ex aqua, gr. $120\frac{1}{2}$, in aqua ipſa gr. 119. aer placidus, mitior, coelum ſerenum.

D. 23. Iulii. Mane, hora ſexta, Therm. in loco quieto gr. 124. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 120. Coelum ſerenum tranquillum.

Poſt meridiem, Therm. in loco quieto gr. 105. in loco ſeptentrionali gr. 112. in ſole gr. 95. ſuper aqua gr. $116\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. Ventus NO. fumum ex ſyluis ardentibus ſuper vrbem pellit.

Veſperi, Therm. in loco quieto gr. 118. ſuper aqua gr. 120-121. in aqua gr. $118\frac{1}{4}$. Ventus remittit.

D. 24. Iulii. Mane, hora octaua, Therm. in loco quieto gr. 106. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $118\frac{1}{2}$. Aer ſereniſſimus, Ventulus ONO. placidiſſimus.

Meridie, Therm. in loco quieto gr. 99. in ſole, ſed a ſubtili fumo impedito gr. 94. in loco ſeptentrionali gr. $115\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $116\frac{1}{2}$. in aqua gr. $117\frac{2}{3}$. Dies aeſtuoſiſſimus.

Veſperi, hora ſeptima, Therm. in loco quieto gr. 115. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{3}$. hora nona, Thermometrum in loco quieto gr. 116. ſuper aqua gr. 119 in aqua gr. $117\frac{1}{2}$.

D. 25. Iulii. Mane, hora ſeptima, Therm. in loco quieto gr. 109. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. 118. Mane ſerenum, placidum, fumoſum.

Meridie, hora tertia, Therm. in loco quieto gr. 96. in ſole gr. 94. non altius propter fumum, in loco ſeptentrionali gr. 108. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. Aer ſerenus, fumoſus, propter Ventum ONO.

Veſperi, Thermometrum in loco aperto gr. 119. ſuper aqua gr. $118\frac{1}{2}$. in aqua gr. 117.

D. 26. Iulii. Mane, Coelum nubilum, hora ſeptima, Therm. in loco quieto gr. $115\frac{1}{2}$. [illegible] pluuia

pluuia gr. $121\frac{1}{2}$. poſt pluuiam gr. 121. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. $117\frac{1}{2}$. aer nubilus, tranquillus, refrigerans, aequalis. SO.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 116. transeunte pluuia in ſole gr. 100. ſole tecto gr. 106. in loco ſeptentrionali gr. 110. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. 117. SO.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 118. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 117.

D. 27. Iulii. Mane, Therm. in pluuia gr. 122. in aqua gr. $117\frac{1}{2}$. SSO.

Meridie, nubila disiecta, Therm. in loco quieto gr. 110. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. $117\frac{1}{4}$.

Veſperi, Thermom. in loco quieto gr. 117. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $117\frac{1}{2}$.

D. 28. Iulii. Mane, Thermom. in loco quieto gr. 115. in loco ſeptentrionali gr. 118. ſuper aqua gr. 120. in aqua gr. $117\frac{1}{2}$.

Poſt meridiem, hora quinta, Thermom. in loco quieto gr. 111. ſuper aqua gr. 112. in aqua gr. 117. Hoc die ſereno ſatis, ventus ex SO, ſenſim mutatur in SSW. et W. nubibus interim ex SO. currentibus.

D. 29. Iulii. Mane, Therm. in loco quieto gr. 112. in loco ſeptentrionali gr. 115. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{4}$. Ventus denuo SO. ſeren.

Meridie, hora duodecima, Therm. in loco aperto gr. $110\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $114\frac{1}{2}$. in aqua gr. 117. in ſole gr. 84.

Pomeridie, hora quarta, poſt ſolis aeſtum nubes ſpiſſae ex oriente ſurgunt, Ventus O. Thermom. in loco aperto gr. 112. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$.

Hora quinta ſurgit pluuia ingens cum tonitru, Therm. in loco expoſito pluuiae gr. 115. Ventus varius. O. NO. N. NW. N. O.

Veſperi, Therm. in loco ordinario gr. 120. in aqua gr. 117.

D. 30. Iulii. Mane, nebula, quae ſenſim diſſipatur, ſeu altius aſcendit. Therm. in loco aperto ab hora ſexta ad ſeptimam a gr. 121-117. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. 118.

Meridie, in ſole gr. 82. hora tertia in loco aperto gr. 110. ſuper aqua gr. 114-115. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$.

Veſperi in loco aperto gr. 120. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. O. Dies ſerenus, ſparſis nubibus.

D. 31. Iulii. Mane, hora ſeptima gr. 120. in loco aperto, ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 118. Dies ſerenus, ſparſis nubibus.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 106. ſuper aqua gr. 117. in aqua gr. $116\frac{1}{2}$. Ventus O. mutatur in W.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 121. ſuper aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. Ventus denuo O.

AVGVSTVS.

D. 1. Auguſt. Mane, Therm. in loco aperto gr. 121. ſuper aqua gr. $119\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. O. ſeren.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 116. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{2}$.

Veſperi,

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 120. in aqua gr. 118. Hodie, licet Ventus O. fluuius tamen altus. Poſt meridiem ſerenum.

D. 2. Auguſt. Mane, Therm. in loco aperto gr. $120\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. flumen altum.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 99. in ſole gr. 84. ſuper aqua gr. 115. in aqua gr. $116\frac{3}{4}$. horis pomeridianis fluuius cecidit.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 114. ſuper aqua gr. 118. in aqua gr. $117\frac{1}{4}$. Totus dies ſerenus, Ventus ONO.

NB. Quamuis per meridiem et veſperam ſit aeſtus ſummus, nihilominus noctu et mane aer eſt frigidus.

D. 3. Auguſt. Mane, Thermom. in loco ordinario gr. 124. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 118. Coelum nubilum frigidum. V. ONO.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. $119\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 118. Coelum incipit clarescere. Ventus ONO. fortis et frigidus.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 121. ſuper aqua gr. $120\frac{1}{2}$. in aqua gr. 118. Coelum ſerenum, aer paulo mitior. Ventus remittit. flumen cediderat ad 4. pedes.

D. 4. Aug. Mane, Coelum ſerenum, ſed aer frigidus, ita vt nocte antecedente multum ſudarent feneſtrae. Ventus O. Therm. in loco aperto et ſeptentr. hora ſexta gr. 126. hora nona gr. 123. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 120.

Meridie, Therm. in ſole gr. 104. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $118\frac{3}{4}$. aqua adhuc ad tres pedes creuit. O. exiguus.

Veſperi in loco aperto, Therm. gr. 121. ſuper aqua gr. 121. in aqua gr. 119.

D. 5. Auguſt. Totus dies nubilus. Mane, Therm. in loco aperto gr. 125. meridie gr. 115. ſuper aqua poſt meridiem gr. 118. in aqua gr. $120\frac{1}{4}$. ſine Vento.

D. 6. Auguſt. Totus dies nubilus ſine vento. Mane, Therm. in loco aperto gr. 124. meridie gr. 116. ſuper aqua poſt meridie gr. 120. in aqua gr. 121.

D. 7. Auguſt. Mane nubilum, ventulus N. Therm. in loco aperto gr. $124\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. $121\frac{1}{2}$.

Meridie, Coelum nubilum, ſed aer paullo clementior tamen, forte ob mutatum ventum in W. Therm. in loco aperto gr. 118. ſuper aqua gr. 122. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$. dum Thermometrum extrahis, mercurius adhucdum cadit fere ad $122\frac{1}{2}$. deinde demum iterum aſcendit ad gr. 122. hoc partim fit ob dilatationem vitri in aere aqua calidiore; partim fortaſſe propterea, quod aquae guttulae vitro adhaerentes in aere libero expanſae exhalent et frigidiores fiant, vnde et ☿ refrigeratur: haec autem refrigeratio eſt tanto ſenſibilior, quo magis frigus aquae et aeris inter ſe aequantur, quo calidior aer eo minus ſenſibilis lapſus, ita, vt tandem in ſola quiete mercurius ſubſiſtat; quo frigidior contra aer, eo celerius mercurius labitur, quando extrahitur. Denuo etiam obſeruo, mercurium non ad eam labi altitudinem, quando Machina

ex

ex aere aperto ſuper aqua tenetur, ad quam labitur, quando per momentum vnum vel alterum in aquam immerſa fuit; idque ob rationes iam ſupra allatas. d. 14-15. Iul.

Poſt meridiem coelum paulum clareſcit.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 120. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

D. 8. Auguſt. Mane, Coelum ſerenum, ventulus WSW. Therm. in loco aperto ſeptentrionali gr. $122\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. 123. ſed mox extract. ex aqua gr. $123\frac{1}{2}$. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$.

Meridie, Serenitas, Nubibus ſparſis ex ſeptentrione oriundis. Therm. in loco ſoli expoſito gr. 84. in loco aperto ſeptentrionali gr. 112. ſuper aqua propter ſolem non experiunda altitudo, in aqua gr. 123. Ventulus WSW.

D. 9. Auguſt. Mane, nubila, mox pluuia ingens, Ventulus S. inde quoque nubes Thermom. in loco aperto gr. 127. in pluuia et ſuper aquam gr. 128. in aqua gr. $123\frac{1}{2}$.

Meridie in pluuia gr. 122. in ſole transmicante gr. 110. ſuper aqua gr. 125. in aqua gr. 123.

Poſtmeridiem, coelum clareſcit, ſolis radii aquae incumbunt, ventus nullus.

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. $127\frac{1}{2}$. ſuper aqua gr. $127\frac{1}{2}$. in aqua gr. $122\frac{1}{2}$.

D. 10. Auguſt. Nocte antecedent epluuiae ingentes. Ventus W. frigidior. Therm. in loco aperto gr. 125. ſuper aqua vltra gr. 126. in aqua gr. 123.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 119. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $122\frac{3}{4}$.

Veſperi,

Veſperi, Therm. in loco aperto gr. 125. ſuper aqua gr. 126. in aqua gr. 123.

D. 11. Auguſt. Mane, nubes, hora nona ſerenaſcit, Therm. in loco aperto gr. 120. ſuper aqua gr. 128. in aqua gr. 123. Ventus O.

Meridie, Therm. in loco aperto gr. 115. ſuper aqua gr. 124. in aqua gr. 122½. Ventus O. fortior. Nubes ſparſae.

Veſperi, Thermom. in loco aperto ſeptentrionali gr. 128. ſuper aqua gr. 127½. fortaſſe propterea, quod aqua iam exhalet, et accumbenti aeri calorem ſuum communicet; in aqua gr. 122½.

D. 12. Auguſt. Mane, hora ſeptima, Therm. in loco aperto gr. 132. in alio aperto ſeptentrionali gr. 132. ſuper aqua gr. 129½. in aqua gr. 123¼. Ventus O. frigidus, nubibus ſparſis coelum obductum.

Propter excurſionem Peterhofiam factam, obſeruationes per dies aliquot omiſſae ſunt.

Fuit autem d. 13. 14. Aug. tempeſtas turbida et pluuioſa, d. 15. coelum clareſcere quidem coepit, ſed vento flante O. frigido, forti. interea

D. 15. Auguſt. Poſt meridiem, Therm. in aqua fuit gr. 126.

D. 16. Auguſt. Mane ſereno, tranquillo, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aqua gr. 128. in aqua gr. 128. Sed NB. quamuis mercurius ad eandem altitudinem ſtabat, extracto tamen Thermometro ſtatim deſcendit ad gr. 129. quod confirmat theſin de guttulis aqueis adhaereſcentibus.

Cur

Cur nunc aer ſuper aquam non aeque frigidus aut frigidior eſt quam in loco aperto et ſeptentrionali? an propter aquam calidiorem nunc exhalantem? vid. d. 11. 12. Aug.

Poſt meridiem, Therm. in loco aperto gr. 127. vento fortiſſimo NO. expoſitum gr. 129. ſuper aqu. m gr. $127\frac{1}{2}$. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. poſt extractionem ſuper aqua ad gr. 130.

Ob valetudinem, quae me intra conclaue detinuit, iterum omiſſa obſeruatio: interea fuit tempeſtas mediocris.

D. 21. Auguſt. Poſt meridiem, Therm. in ſole gr. 95. ſuper aqua quo ſol nondum penetrauerat, gr. 127. in aqua gr. 128 ſine vento.

D. 22. Auguſt. Mane, nebula, Therm. in loco aperto gr. 132. poſt horam in loco ſeptentrionali gr. 128. ſuper aqua gr. $127\frac{5}{6}$. in aqua gr. $128\frac{1}{2}$. iterum ſuper aqua gr. $128\frac{2}{3}$. Ventus nullus.

Poſt meridiem, hora prima in ſole, coelo non ſatis claro, gr. 98. extra ſolem in loco ſeptentr. gr. 117. ſuper aqua gr. 119. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. iterum ſuper aqua gr. 123. Ventus nullus; vel certe paruulus SW.

D. 23. Auguſt. Mane, nebula, ſine vento, aer frigidiuſculus. Therm. in loco aperto gr. 130. in aqua gr. 128.

D. 27. Auguſt. antecedentibus diebus pluuioſis duobus, mane, nebula, Therm. in loco aperto gr. 130. ſuper aquam gr. 128. in aqua gr. $127\frac{1}{2}$. denuo in aqua gr. 129. ſine vento.

Tota dies pluuioſa, nubibus a ſole nonnumquam diuiſis.

Veſperi, Therm in loco aperto gr. 125. in aqua gr. 127. ſuper aqua gr. 126.

III. COROLLARIA DEDVCTA EX OBSERVATIONIBVS.

Aquae Calor, dum ſub glacie tecta fluxit illa, nec decrementum paſſus eſt nec incrementum, ſed per totam hyemen idem permanſit, et quidem ita, vt mercurius in Thermometro, quo vſus eram, ſemper haeſerit circa gradum (152) centeſimum quinquageſimum ſecundum, quotiescunque in aquam intrudebatur inſtrumentum; qualemcunque deinde faciem aër induxerit. Non igitur ingruente gelu frigidior vmquam facta eſt aqua, nec mitiore et remittente tempeſtate calidior. Et ne quis putet, reſiſtentiam forte quandam in tubo ipſo fuiſſe, qua impeditus erat Mercurius, ne altius aſcenderet, experimentando dubium omne ſuſtuli. Transtuli enim in locum calidum inſtrumentum, et mercurium facili negotio ad gradum 80. pepuli. Apparuit hinc non modo filum mercuriale in Tubo, aequale et continuum, ſed et mox in aqua frigida ad priſtinum ſuum gradum 152. delapſum eſt. Vnde de phaenomeno certiſſimus eſſe poteram.

Quando Mercurius in aere libero expoſitus haerebat circa gradus 152-156. ille gradus caloris adhuc aptus erat, vt nix in eo deſcenderet ac conſiſteret, vti videre eſt. d. 4. 8. 9. 10. 17. 28. 30. Martii. Quando autem aſcendit ad gr. 150, 148. et vltra: nix mox liqueſcebat.

Haec memorata phaenomena confirmant ea, quae iam ante de calore aquae nota fuerunt. Eſt nimirum certus aliquis gradus, vltra quem ſi deſcendit, aqua non amplius

amplius aqua manet, ſed in glaciem conuertitur, et quidem breuiſſimo temporis ſpatio; non enim aqua ſenſim ſenſimque compactior fit, et congelaſcit, vti alia quaedam liquida, vt cera, adeps, et omnia olea. Determinauit *Cel. Boerhaue* in Chymia ſua hunc gradum, ad altitudinem Mercurii in inſtrumento *Fahrenheitiano* gr. 32-33. in inſtrumento noſtro autem indicatur gr. 152. qui quidem gradus quam proxime inter ſe concordant, poſtquam proportio inter *Boerhauianum* et noſtrum inſtrumentum innotuit; et quia in noſtro Thermometro mercurius in 10000 partes aequales diuiſus eſſe ſupponitur: ſequitur volumen mercurii in aqua feruente eſſe ad eiusdem volumen in aqua gelaſcente, vt 10000: 9848. (9850.)

Neceſſario igitur aquae fluens ſub glacie hunc eundem infimum gradum caloris conſtanter conſeruat. Id quidem iam nunc ex obſeruatione luculenter conſtat; ſed poteſt quoque haec veritas per ratiocinium facile erui; nam ſi velles, vt minueretur, tunc neceſſario in glaciem conuerteretur; ſi vero increſcere debeat, id vicinia accubantis glaciei impediet. Nam quia duo vicina corpora tamdiu mutationem caloris ſecum communicant, donec ad aequilibrium peruenerint; aqua fluente calidior fieri non poterit. Imo nulla eſt ratio, vnde calor ille augeatur. Sunt enim non niſi duo corpora, quae hoc augmentum afferre poſſent, Sol nimirum, et aer. Quamdiu autem glacies incumbens aquae, horum duorum corporum virtute non mutatur, tam diu nec aqua ipſa ſubterlabens mutationem perſentiſcet.

Quia idem aquae calor perſiſtit, donec fluuius ab omni glacie liberatur: ſequitur, falſam eſt hypotheſin illorum, qui rationem reddere ſatagentes, quare ſoluta hyeme, glacies, cuius altitudo ad duos tresve pedes vsque excreuerat, Menſibus Martio et Aprili tandem minuatur et fragilis fiat? cauſſam allegare ſoleant, illam iam nunc conſumi tam ſuperne quam inferne, ſuperne propter actiuitatem ſolis, inferne, quod aqua calidior glaciem liquefaciat. At vero aqua ſemper aeque frigida manet, nihil igitur decedit glaciei dum aquae accubat, niſi per motum et frictionem, vti experientia comprobat. Nam ſi foramen rotundum in glaciem inciditur, illius ora inferior, quam aqua lambit, ſucceſſu temporis obliqua fit, ſecundum directionem aquae fluentis. Motus autem aquae et frictio non ſolis menſibus dictis, ſed tota hyeme locum habet. A radiante igitur Sole et aere tepidiore, vel et a pluuia calidiore et copioſa omnia vnice dependent.

Quando inſtrumentum ex aqua extrahebatur, ros aqueus cylindro vitreo adhaerens ſtatim in glaciem conuerſus fuit, quamdiu aeris calor inferior erat calore aquae. Illi igitur, qui in hisce regionibus, rigente bruma, ex balneis calidiſſimis, mox in fluminis aquam ſub glaciem ſe praecipitare ſolent: tantam mutationem corpori ſuo non inducunt, quam qui immediate ex balneo in aerem liberum ſe conferunt.

Poſtquam aqua glacie liberata erat, vt liber aditus aeri pateret, calor aquae increſcere coepit, ita vt primo Maii die mercurius ad gradum 148. aſcenderet. Differentia igitur erat intra duas hebdomadas, 4. graduum.

Factum

Factum est autem, vt illis ipsis Calendis Maii, glacies ex lacu Ladoga adueheretur. Cum igitur denuo in calorem aquae haec occasione inquirere animus erat, deprehendi mercurium labi ad gr. 151. et si quando frustum glaciei in vicinia instrumenti flueret, ad gr. $151\frac{1}{2}$. Mutationes igitur caloris aquae, in qua experimenta capiuntur, non tam dependent a mutatione aeris incumbentis in loco obseruationis, quam potius a temperatura omnis illius aeris, sub quo aqua per omnem suam viam defluxit. Non enim in exemplo hoc putandum est, aquam denuo tam subito frigefactam esse, sed illa ad hunc gradum frigida vna cum glacie illa noua affluxit, in cuius vicinia energia solis et aeris in aquam penetrare nondum poterat.

Circa obseruationes aestate factas varia inciderunt incommoda, quae laborem difficilem reddiderunt, quamuis omnem industriam adhibuerim, quae in re numquam hactenus tentata posci potest.

Ante omnia quam clarissime apparuit, Thermometra nostra plane non idonea esse ad expiscandum caloris verum gradum in aere generaliter, sed, si duo obseruatores in locis non adeo longe dissitis instrumentis aequalibus ad mutationem caloris attendant eodem tempore, numquam tamen phaenomena notata concordatura esse. Huius defectus culpa non in instrumento, sed in ipsa natura caloris quaerenda est, quippe qui omnibus corporibus inhaeret, et tam diu se cum aliis vicinis communicat, quamdiu haec frigidiora sunt. Necessario igitur aer, in vicinia corporum calidiorum aut intra loca angusta et quieta delitescens calidior esse debet, quam ille, qui aut longe ab aliis corporibus

distat, aut plane liber est. Inde accidit, vt vno eodemque tempore, alium caloris gradum notari a Mercurio deprehenderim, in loco quieto in vicinia domuum, vbi ventus non adeo libere vndique accedere poterat, alium in loco aperto, alium in loco sine sole, alium in loco a sole irradiato, alium in plaga septentrionali, alium in meridionali; alium denique super terra, alium super aqua fluente, ex. gr. d. 13. 14. 15. Iunii. alio tempore parum differebat, imprimis post pluuiam, vt d. 9. Iulii. Quae quidem inconstantia quamuis impediat, ne accurate sciam relationem inter calorem aeris et aquae: non tamen prohibet, quominus varias differentias caloris aquae ipsius ac temperaturae aeris inter se expiscari possim.

Institutum quidem erat, ab initio, ad calorem aeris quieti, et liberi attendere; insequentibus vero temporibus, et quidem d. 13. Iunii didici, oportere me probe etiam notare calorem aeris ipsi aquae immediate incumbentis, ni vellem decipi in indagando calore aquae. Vidi enim tum temporis, postquam instrumentum ex aqua extraxeram, Mercurium adhucdum notabiliter cadere, cuius quidem rei nulla alia causa subesse poterat, quam quod aer incumbens multo frigidior esset quam aqua, et aer ille, in quo alias Thermometrum obseruare solebam.

Multum impedimenti quoque attulit diuersa fluminis altitudo aut profunditas, itemque motus aquae ex vento aestuans. Illud enim in causa fuit, vt non accedere possem ad distantiam requisitam; istud, vt non satis promte post extractionem gradum mercurii obseruare mihi liceret, sed nunc maiorem nunc minorem, pro diuersitate aeris incum-

incumbentis, propter moram adipiſcerer; hoc, vt inſtrumentum fluctuaret, nec aequabiliter ab aqua lamberetur.

Imprimis oportebat, vt celeritate, qua potui, dexterrima ad gradus reſpicerem, poſtquam extractum erat inſtrumentum; Nam vel parciſſima mora, imprimis ſi calor aquae et aeris incumbentis multum differebat, varias incommoditates peperit: ſiquidem mercurius poſt extractionem nonnumquam paululum cadebat, mox vero aſcendebat, nonnunquam vero poſt lapſum aliquantulum quieſcebat, et tum demum aſcendebat, vt d. 12. 14. 15. Iul. d. 7. 11. 16. Aug. quod ſine dubio inde prouenit, partim, quod cylindrus vitreus in aerem calidiorem delatus, ſecundum generalem regulam de vi caloris expanſiua, prior extendebatur, vt hinc mercurius ſpatioſiorem capacitatem nactus neceſſario paululum laberetur; partim, quod guttulae aqueae cylindro extracto adhaerentes, in aere, etſi calidiore, exhalarent, hinc quadantenus refrigeſcerent, et refrigerium ſuum cum mercurio intus contento communicarent. Ex quibus omnibus apparet, quam circumſpecta ſolertia opus fuerit in negotio, quod ab initio facile videbatur, ſed perplexo tamen, quia natura vbique etiam in minimis, leges ſibi impoſitas conſtanter obſeruat. Hinc raro vnico experimento contentus eram, ſed plerumque tribus quatuorue vicibus rem repetii, vt de obſeruatioue facta certus eſſem.

Phaenomena autem, quae in mutatione caloris aquae fluentis per aeſtatem occurrerunt, praecipua haec ſunt:

1.) Calor aquae lente creuit, ita vt ſummum incrementum vno die d. 25. Iun. factum, eſſet duorum

duorum graduum; deinde d. 20. 23. Iun. item d. 16. et 19. Iul. incrementa erant ad gr $1\frac{1}{2}$. Qui quidem dies etiam omnium erant aestuosissimi.

2.) Quicquid de die accessit, illius saltim dimidium noctu iterum decessit; si quidem illae frigidiores essent, et longiores, vento septentrionali simul flante. Vt d. 16. 17. 18. Iul.

3.) Noctes breuissimae mense Iunio, siquidem calidae erant, vt d. 27. Iunii. parum vel nihil immutarunt.

4.) Incrementa caloris incidebant plerumque in horas pomeridianas, queis et aer et aqua solis radios et energiam experiebantur, vt toto mense Iulio et imprimis d. 29. Iul.

5.) Aqua caloris gradum adeptum pertinaciter retinuit, nec ita facile tempestate alia ingruente, nisi post aliquot dies, illum dimisit, vt vltimo Iun. item d. 8. 9. 10. 11-16. Iul.

6.) Calor aquae summus erat mane, d. 29. Iul $11\frac{1}{4}$. gr. nec non d. 25. 30. 31. Iul. et 1. 2. 3. Aug. 118. grad. Meridie autem, d. 30. Iul. $116\frac{1}{2}$. gr. vt igitur augmentum totum caloris aquae hac aestate fuisset, $35\frac{1}{2}$. grad.

7.) D. 3. August. calor aquae vltima vice summum gradum 118. attigerat; ex quo tempore iterum lentis gradibus decreuit.

DE

DE DVOBVS LAPIDIBVS FIGVRATIS.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

CVm menſe Auguſto, anni ſuperioris 1733, in *Li-* Tabula XII.
uonia prope littora *Sinus Finnici* verſarer, atque inter alia etiam caſtellum aliquod dirutum, quod *Tolisburgum* vocatur, ſpectarem: accidit forte vt ibi, inter multos hinc et inde ſparſos lapides arenoſos, inuenirem duos *Figuratos*, quorum primus aſpectus ideam ſtatim illorum lapidum animo meo reuocauit, quorum pereruditam deſcriptionem et explicationem *Cl. Gmelinus* noſter *Tom. III. Commentariorum* inſeruit. Multum laetatus ego, quod ex hoc qualicunque meo reperto aſſertis citato loco explicatis accedere forſan aliquid poſſet, lapides huc attuli, traditurus eos *Cl. Gmelino* tanquam ſuos; is vero cum iam profectus hinc eſſet, hoc meo propoſito excidi. Quamuis itaque in hoc ſtudiorum genere me non adeo verſatum eſſe ingenue fatear: malui tamen, quid in re noua poſſim, periclitari, quam haec, qualiacunque demum ſint, plane ſupprimere.

§. 2. Littora maris eo in loco, vbi lapides hosce reperi, munita ſunt longo tractu collium haud leuiter as-

surgentium, ita tamen vt a radice collium planities adhuc aliqua superfit versus mare ipsum, repleta vbicunque fere sterili arena; huic arenae interspersi sunt lapides quamplurimi ex eadem arena concreti, et quasi tantum collecti, qui solius etiam manus agitatione in pristinam arenam conteri facile possunt. Iacebant mei non multum inter se dissiti, et liberi, in superficie arenae, atque aliud quiddam inuestiganti sponte se obtulerunt, vtrumque vero quamuis sine opera obtinuerim, plures tamen postea, ex industria quaerens, inuenire non potui.

§. 3. Tota exterior figura horum lapidum ita comparata est, vt facile persuadere sibi quis posset, ortum illos suum debere spinae dorsi cum inserta medulla, animalis cuiusdam aquatici; atteutius vero eos considerantibus distingui merentur in iis quatuor praecipue 1. *Patellae*, 2. *Alueolus*, 3. *vtrique horum adhaerens Materia testacea*, et 4. *Lapis communis toti massae affixus*. *Patellae*, ab vna parte sunt concauae, conuexae ab altera, et vtrumque circulariter, ad sensum, ita quidem vt in Figura A recta concauitatem subtendens sit 130 partium millesimarum pedis Rhenani, quas in sequentibus quoque adhibeo; in Figura B autem 152. Interuallum, quo vna patella ab altera distat, *ba*, est vbique fere idem, et in vtroque 40 partium. In Figura B, in cuius originali patellas *a* et *b* separaui a reliquo lapide, vti paulo post dicetur, distinctas videre licet testae cuiusdam reliquias, valde tenues, leues, et albicantes: extracto quoque alueoli frusto *c* exacte patet, quod hac materia testacea integra patellae concauitas et conuexitas fuerint inductae et obductae.

§. 4.

§. 4. Perforatae conſpiciuntur hae patellae, in earum peripheria *Alueolo* in rectam extenſo, rotundo, conico. Nempe in Figura A inueni diametrum huius alueoli maiorem apud *c* 50. ſed apud *d* 47. partium, ita vt haec diameter a loco *c* vsque ad *d* in longitudine 211. partium, aliquantum decreſcat. Ipſe vero hic alueolus *circularis* non eſt, ſed *Ellipticus* in ratione axis maioris *ef* ad minorem *gh* vti 16. ad 15. ſed in figura B diameter maior apud *c* eſt 56. apud *d* vero 46. partium, ita vt hic alueolus in longitudine 214. partium multo magis decreſcat, quam prior. Erit ergo alueolus Figurae A ſi aequaliter a baſe *ehfg* porrectus eſſet $3\frac{1}{2}$ pedum Rhenan. in Figura B autem multo breuior, nempe $1\frac{1}{5}$. pedis Rhen. Id vero commune eſt vtrique lapidi, quod alueolus a concauitate patellae ad conuexitatem ipſius progrediatur decreſcendo. In Exemplari Figura B repraeſentato, conuexitatem cylindricam atterendo adimi iuſſi, vt alueolo planities 96. partes lata inducta fuerit; quo facto alueolum in *e* diffractum inueni ita, vt adhibita aliqua opera, potuerit eius pars *de* extrahi, ſimul etiam duo patellarum *a* et *b* fragmenta auferri. Extracto igitur hoc alueoli fruſto, obſeruaui in eius parte inferiori, qua per patellas tranſit, non modo veſtigia diſtincta linearum ellipticarum, quae iuncturis patellarum exacte reſpondent; ſed praeterea quoque reſiduum alicuius materiae teſtaceae adhaereſcentis, quae facile abradi poteſt. Perſpicitur etiam, quod haec materia teſtacea circa alueolum conſtituerit tubum transuerſim per patellas transeuntem, id quod non minus ex originali Figurae A concludi poteſt, vt pote in cuius extremitate *c*, quam ſimi-

liter atterendo in planitiem reduci curaui, facies elliptica alueoli peripheria lutei coloris cincta eſt, quam nihil aliud eſſe puto, niſi peripheriam extimam eiusdem tubuli teſtacei alueolum ambientis. Apparent quoque in Figura A, in cuius dorſo cylindrico alueolus prominet, lineolae transuerſae *k i*, vel *m n*, *o p*, corpuſcula transuerſa vocatae a *Cl. Gmelino Diſſertationis ſuae* §. 7. quas vero nihil aliud eſſe credo, quam continuationes, aeris iniuria non nihil deformatas, antecedentium linearum ellipticarum, patellarum iuncturis reſpondentium, quas in extracto alueoli parte *e d* Figura B detexi.

§. 5. *Lapidis communis* maſſa informis affixa eſt vtrique noſtro lapidi in parte Figurarum A et B auerſa, qua ſine dubio, prout ex *Diſſertationis Gmelinianae* §. 16. patet, aliis olim lapidibus fuerunt annexi, caſu vero quodam, ſucceſſu temporis, ab iisdem abrupti. Apparet haec maſſa lapidis communis in Figura A ſub literis *t q r v*, et in Figura B ſub literis *f g h*.

§. 6. De *materia teſtacea* iam dixi, eam in quibusdam locis diſtinctam apparere, non ſolum circa maſſam lapideam alueoli, ſed etiam in concauitate et conexitate patellarum, quibus hoc vnicum addo, quod in Figura B fruſtulum aliquod ſatis paruum facile ſeparauerim, quod manifeſte teſtaceae cuiusdam materiae faciem et naturam tenet, craſſitiem vero habet 2 partium milleſimarum pedis Rhenani.

§. 7. Vtriusque lapidis magna cura etiam examinaui *pondus*, atque inueni lapidis A fuiſſe pondus in aere

4455

4455. granorum, in aqua vero tantum 2764. gr. ita vt in aqua amiserit 1691. gr. lapidis vero B pondus inueni in aere 4495. gr. in aqua autem 2758. gr. qui ergo amisit in aqua 1737. gr. vnde deduxi densitatem lapidis A = 2.63; lapidis vero B densitatem = 2.58 posita densitate aquae = 1.00. Vt comparationem aliquam instituere possem, examinaui quoque lapidis campestris vulgaris pondus in aere pariter et aqua, atque illud inueni 6822. gr. hoc vero 4229. gr. quod iacturam ponderis indicat 2593. gr. et densitatem huius lapidis commonstrat 2.63. praecise eandem, quam Fig. A exhibuit: vnde et Figuratum lapidem A, et campestrem hunc, ex eadem materia lapidea concretos esse credendum est. Conchamdeinde quandam vmualuem, mediae magnitudinis, eodem modo librae examini subieci, et inueni pondus eius in aere 919. gr. in aqua 527. gr. ita vt decrementum ponderis fuerit 392. gr. ex quibus eius densitas prodit 2.34. suppositavbique eadem, qua ante, aquae densitate.

§. 8. Conueniunt haec omnia cum iis, quae *Cl. Gmelinus* de his lapidibus tradidit, quare eo minus dubito eidem sententiae accedere, quam de origine horum lapidum fouet, hancque iure maximo adscribi posse puto *Nautilorum* generi, cuius, per medium horizontaliter secti, elegantissimam delineationem dedit *Clarissi. Ioh. Philippus Breynius Med. Doctor* in Dissertatione Physica de *Polythalamiis*. Omnia enim et singula, quae circa patellas testae obductas, et alueolum eadem testa circumdatum, in praecedentibus enarraui, aptissime ad hoc conchyliorum genus

quadrant, vtpote cuius thalami, fracta eo in loco, vbi lapis communis adhaeret, testa exteriori, lapidea materia fuerunt repleti, testa naturali superstite adhuc alicubi, alibi vero exesa, et temporum successu detrita; ita vt hi lapides omnino *formati sint in cauitatibus Nautili sub terra, tum externam Nautili figuram, tum internam organicam fabricam referentes*; quam *Nautilitarum* definitionem *Cl. Breynius* exhibet *l. c. Cap. III. §. 29.* Itaque etiam conuenientissime citatus *Clar. Auctor* lapides hosce *Gmelinianos*, qui iidem sine dubio sunt cum meis, *Orthoceratitis* accensct, speciei Polythalamiorum *l. c. Cap. VI. §. 59.* quamuis non negare velim, eos etiam sic dictis *Lituis*, alteri *Polythalamiorum* speciei, posse accommodari.

§. 9. Recensct *Cl. Gmelinus*, lapides tales figuratos inuentos in *Insula Oelandia*, quos possidet *Reuer. Iacobus a Melle*; repertos in Silesia, testante *Volckmanno*, *in Silesia subterranea*; extractos in *Borussia*, teste *Helwingio* in *Lithographia Angerburgica*; effossos in *Ingria*, ab *ipso*: annumero his repertos meos ad littora *Sinus Finnici prope Reualiam*; quibus adiicio *Nautilitas* varii generis, repertos in Ducatu Würtembergico, quos possidet *Cl. Breynius*; nec minus etiam eos, quos *Cl. de Iussieu* inuenit in *Gallia*, descriptos in *Commentariis Academiae Scientiarum Parisinae Anno* 1722. *pag.* 319. *Editionis Batauae.* Accedit insuper tantus *Cornuum Ammonis numerus*, quae per totam Europam inueniuntur, et huic *Polythalamiorum* generi subiacent. Totam igitur Europam hoc lapidum genus in locis subterraneis continere, atque id magnae inundationi maris alicuius, in quo hoc conchylio-

chyliorum genus reperitur, deberi, merito iudicandum eſt. Incolis vero ſuis talia Conchylia annumerat, quantum conſtat, ſolum *Mare Indicum*, quod *Nautilos* alit, quorum concha eſt articulata, et in thalamos diuiſa, qualia ſpecimina petrefacta ſunt noſtri lapides; quos enim *Nautilos* producit *Mare Adriaticum* et *Mediterraneum*, ab *Ariſtotele* et *Plinio* allegatos, illi articulatione et thalamis carent, nec niſi vnica teſta continua et contorta conſtant, eaque adeo tenui, vt hinc *Papyraceorum* nomine veniant. Ex *Maris Indici* igitur excurſu, totam Europam peruadente, lapidum noſtrorum originem cum *Cl. de Iuſſieu* repetere fas eſt, neque mirandum, quod talia conchylia, quorum exuuiae circa littora *Maris Baltici* reperiuntur, in ipſo mari non amplius ſuperſint; aut ſtatuendum, quod ea in morem piſcium et cancrorum priſtinam ſedem ſuam deſeruerint: nunquam enim ibi fuerunt, ſed ex *Indico Mari*, tanquam ex patria ſede, vi fluctuum iactata, in noſtras terras, quaſi in exilium, ſunt pulſa.

§. 10. Caeterum natura ſoli *Ingrici*, quam *Clar. Gmelinus* ope terebrae metallicae inuentam, recenſet, vbi terra primo deprehenſa eſt *duas*, lapis calcarius, cui noſtri lapides figurati immixti ſunt, *octo*, lapis ſciſſilis *vnam*, et arena *multas*, perticas profunda, apprime confirmat naturam ſoli etiam illius *Liuonici*, quo iuxta littora maris protenditur. Animaduerti enim ex itineris totius, vsque ad *Tolisburgum*, curſu, quod, habito interſperſorum montium reſpectu, veniatur ſemper in loca magis humilia, ita vt relicta vrbe *Narua*, terra, quae in *Ingria*

duarum

duarum tantum perticarum profunditatem habet, fere amplius nulla ſuperſit, ſed ibi omnia lapide calcario ſtrata quaſi ſint; vlterius deinde proficiſcenti, et ad ipſa littora maris accedenti, patuit, me quoque lapidis huius calcarii, octo perticas profundi, terminum inferiorem attigiſſe, atque in eum locum, vbi profundum arenae ſtratum incipit, deſcendiſſe; ita vt credi poſſit, ſtratum illud lapideum, continua maris alluuie exeſum et fractum, lapides noſtros temporis ſucceſſu a vinculis liberatos reliquiſſe, eosque hac ratione ſubiacenti arenae expoſitos fuiſſe.

DE

DE INVENIENDA DISTANTIA MACVLARVM SOLARIVM A SOLE.

AVCTORE
Georg. Wolffg. Krafft.

§. 1.

EX diligenti macularum Solarium obſeruatione cognitum fuit, *citius eas diſcum Solis nobis conſpicuum permeare, quam alterum à nobis auerſum.* Tab. XIII. Inſeruit hoc phaenomenon Theoriae harum macularum duplici ex capite. Primo enim per id manifeſtum fit, *maculas iſtas non inhaerere ipſi Solis ſuperficiei*, vt quibusdam viſum eſt; ex hoc enim ſequeretur, maculas eodem tempore aduerſam et auerſam ſolis partem percurrere debere, cum, ob ingentem Solis a Terra diſtantiam, ſemper dimidiam eius partem ſenſibiliter intueamur. Secundo ex obſeruatis temporibus quibus macula aliqua in Sole conſpicua eſt, et deinde poſt eum deliteſcit, *diſtantia quoque illius maculae a Sole Geometrice deduci poteſt*, quod a pluribus quidem generaliter annotatum, a nemine vero ipſo calculo comprobatum inuenio.

§. 2. Sit corpus Solis BC, et moueatur macula in circulo concentrico EDGF, ducantur deinde ex oculo ſpectatoris in terra A duae tangentes Solem lineae ACD

et ABE; euidens eſt, maculam tantum conſpicuam fore in diſco Solis, dum arcum FG percurrit, reliquo toto periodi ſuae tempore inuiſibilis erit nobis. Nam dum arcum GD aut FE percurrit, ob ſuam obſcuritatem in Solis atmoſphaera videri nequit; cauſa enim cur in arcu FG nobis viſibilis fiat vnica eſt, quod obſcuritate ſua lucidi diſci Solaris particulam obtegat. Dum vero arcum DE percurrit, eam ob cauſam videri nequit, quod poſt corpus Solis deliteſcit. Igitur haec macula per totum arcum FEDG inuiſibilis ſit, neceſſe eſt; qui cum euidenter maior ſit arcu FG, patet ex hoc phaenomeno ſequi, quod maculae non in ipſa Solis ſuperficie circumducantur.

§. 3. Si ergo ponamus maculas in circulis Soli concentricis aequabiliter moueri circa Solem, erunt arcus FG, et FEDG proportionales temporibus quibus iſti arcus deſcribuntur; poterunt igitur arcus ipſi inueniri, ſi dentur duo tempora, quorum vnum indicat moram maculae in arcu FG viſibilis, alterum vero moram maculae in altero arcu FEDG inuiſibilis. Ducatur recta AH ex terra per centrum Solis, et radius HF, biſecabit illa in L et K arcus FG et FEDG; erit itaque tempus dimidium apparitionis per LF ad tempus dimidium occultationis per FEK vti angulus FHL ad angulum FHK, qui eſt 180°, minus angulo FHL; et componendo, erit tempus dimidium apparitionis plus tempore dimidio occultationis, hoc eſt, tempus dimidium periodi totius ad tempus dimidium apparitionis, vel quod eodem recidit, tempus periodi integrae ad tempus apparitionis integrae, vti

vti 180. gradus ad angulum FHL. Ex hac analogia itaque inuenitur angulus FHL ex obſeruatione. Sed in triangulo FAH dantur praeterea latus AH diſtantia Solis a Terra, et angulus FAH, qui eſt ſemidiameter apparens Solis; igitur ex his poterit inueniri latus FH, a quo ſi ſubtrahatur radius corporis Solaris, remanebit MF diſtantia maculae a Solis ſuperficie.

§. 4. Exemplo inſeruire poteſt celebris illa obſeruatio *Godofredi Kirchii*, qui Lipſiae 1684. a 26. Aprilis vsque ad 7. Iulii maculam eandem aliquoties reducem obſeruauit, atque inuenit, tempus apparitionis fuiſſe 12 dierum, occultationis vero 15. dierum. Pro abſoluendo autem hoc calculo ante omnia determinari debet ſemidiameter vera corporis Solaris. In hunc finem aſſumo diſtantiam Solis a Terra mediam Hirianam 34377. ſemidiam. Terrae. Semidiametrum apparentem Solis mediam $16'\ 5''$, atque infero, vti ſinus totus (10000000) ad diſtantiam Solis a Terra (34377) ita ſinus ſemidiametri Solis apparentis (46784) ad ſemidiametrum corporis Solaris (160. 829. ſemid. terr.) Poſita igitur hac ſemidiametro corporis Solaris, fiat per inuentam regulam: vti tempus integrum periodi (27. dies) ad tempus integrae apparitionis (12. dies) ita 180. gradus ad 80. gradus, quos continet angulus FHL. Tempore obſeruationis erat ſemidiameter Solis apparens $15'\ 54''$, et Logarithmus diſtantiae Solis a Terra 4.00504, poſita diſtantia media 10000; numerus illius Logarithmi eſt 10116.74, facta igitur reductione ad diſtantiam mediam aſſumtam 34377 ſemi-

diametr. terr. fuit eo tempore distantia Solis a Terra 34778.317 semid. terr. Soluto igitur triangulo FHA ex datis angulis FAH = 15′ 54″, FHA = 80° 0′ 0″ et latere AH = 34778.317, inuenietur FH distantia maculae a centro Solis 163.204 semid. terr. a qua distantia si subtrahatur semidiameter Solis superius stabilita, remanebit distantia maculae a superficie Solis 2.375 semid. terr. vel sumta semidiametro Terrae pro 860 milliaribus Germanicis, quorum 15 gradum aequatoris efficiunt, erit distantia maculae a superficie Solis $2042\frac{1}{2}$ milliar. Germ.

§. 5. Inter magnam macularum copiam, quas in annis 1728, 1729 et 1730 obseruaui, non nisi vnicam vidi, de qua certus esse poteram quod redux sit. Obseruaui de ea, eam spatio 13 dierum in disco Solis apparuisse, 14 dies autem post Solem latuisse. Cum autem Diarium illarum Obseruationum anno 1732 incendio mihi perierit, nescio amplius dies illarum obseruationum vel annum; quare nec conuenientem semidiametrum nec distantiam a Terra Solis pro calculo exinde ducendo assumere possum. Si vero retineantur distantia Solis a Terra, et semidiameter Solis apparens, mediae, inuenietur, distantiam illius maculae a Solis superficie fuisse 1501.56 milliar. Germ.

DE

DE CIRCVLATIONE SANGVINIS COGITATIONES PHYSIOLOGICAE.

AVTORE
Iosia Weitbrecht.

CAP. II. (*)

Examen virium, quae motum Sanguinis producunt.

Prolegomena.

§. 1.

QVando corpus quodcunque mouetur, illud cum velocitate quadam locum suum mutat. Hanc autem velocitatem concepit a vi quadam, et illa quidem, vel innata, vel aliunde accedente. Recte igitur *Pecquetus* Sanguinem vel proprio ruere incitabulo vel alieno impelli, enunciat. Tabula XIV.

§. 2. Nulla autem alia vis hactenus inter physicos cognita est, quae motum producere potest externe accedens, nisi aut vis grauitatis, aut vis magnetica vel attractiua, aut vis alius corporis moti, certa velocitate in corpus mouendum irruentis vel impetum facientis.

§. 3. Non adeo difficile erit, haec adplicare ad sanguinem, cuius motum supponimus. Sunt enim tria

(*) Cap. I. vid. Tom. VI. p. 276.

potiſſimum corpora, quae experimentis et obſeruationibus moueri docemur, & quorum motu perfecte ſublato, motus quoque ſanguinis tollitur: cor ipſum, quatenus duobus ventriculis terminatur; cordis auriculae; et arteriae. Non dubium eſt igitur, quin tria haec corpora potentiae illae mouentes ſint, quae motum Sanguini imprimunt. An vero illa Sola ſint, an vero grauitas quoque Sanguinis ad ſui motum quicquam conferat; item, an vaſorum capillarium ſumma anguſtia vim attractiuam cum effectu ſpecioſo exerceat? id quidem eſt, quod alii in dubium vocant, alii autem aſſeuerant, et de quo in ſequentibus diſpiciemus.

§. 4. Materia ergo ipſa per ſe in quinque ſectiones diſpeſcitur, vt primo de grauitatione Sanguinis, deinde de actione cordis, porro de actione arteriarum, tandem de actione auricularum, et denique de attractione vaſorum capillarium in hoc capite agamus.

Sectio I.

De Grauitatione Sanguinis.

§. 5. Sanguinem grauem eſſe, quia ponderat, quin ſupponamus, nihil eſt, quod impedit. Omne autem graue deorſum tendit, et vi huius tendentiae preſſionem in ſubiecta corpora exercet, quae preſſio grauitatio quoque dici ſolet.

§. 6. Non mirum eſt igitur, dari phyſicos, qui ſanguini preſſionem ſimilem (§. 5.) tribuere velint. Atque id quidem recte; partim vi legitimae conſequentiae; partim, ſuffragante experientia.

§. 7.

§. 7. Non autem circa generalia iſta (§. 5 6) verſatur praeſens noſtra conſideratio; ſed magis determinate ſcire oportet: an grauitatio ſanguinis motum ſui in vaſis promoueat? ſiue, an motus huius liquoris celerior fiat ex eo, quod grauitate ſua deorſum tendat?

§. 8. Maioris dilucidationis ergo non inutile erit praemittere, quid alii, et quibus rationibus de hoc (§. 7.) problemate differuerint. Quaeſitum enim fuit: an arteriae iunctae cum venis (Cap. I. §. 12.) pro ſiphone vel tubis communicantibus haberi poſſint? an igitur ſanguini in his vaſis contento idem accidat, quod aliis liquoribus, e. gr. aquae in iſtis tubis accidere deprehenditur? Atque hanc quidem quaeſtionem adeo firmiter coniunxerunt cum praecedente (§. 7.), vt qui hanc vltimam aſſeuerarunt, eo ipſo primam quoque ſtabilire crederent; qui vero primam negare contenderunt, ſatisfeciſſe ſcopo autumarent, ſi vltimam deſtruxiſſent. Exemplo ſint *Pecquetus* et *Guilielmini*. Ille ſanguinem ſuo proprio pondere moueri negauit ex eo, quod vaſa ſanguiferа rationem ſiphonis non habeant, atque hanc diſſimilitudinem argumentis quinque adſtruxit. 1.) Quia in ſiphone transitus liquoris ex vno crure in aliud fiat tempore eodem: in vaſis autem diuerſo; 2.) quia ligata vena iugulari ſanguis nihilominus ſupra ligaturam accurrat; 3.) quia in cadauere venae turgeant euacuatis arteriis; 4.) quia vena cruralis ligata euacuetur verſus cor; 5.) quia arteria cruralis ligata euacuetur verſus extrema. *Guilielmini* contra, grauitatem ſanguinis motum ſui adiuuare aſſerit ex eo, quod ſecundum naturam fluidorum partim aequilibrium in vaſis inferioribus tamquam

tamquam in ſiphone recuruo conſeruet, partim in vena ſuperiore proprio pondere ex capite verſus cor relabatur, et ſui regreſſum promoueat.

§. 9. Dum, vt propius ad rem accedamus, circuitum ſanguinis aſſerimus, transitum illius ex vno vaſe in aliud dicimus (Cap. I. §. 1.); arteriae igitur et venae inter ſe cohaerent (Cap. I. §. 12.). Praeterea in erecto homine vaſa ſitum perpendicularem, vel perpendiculo proximum, et ad illud facile reducendum ſeruant. Nihil igitur ex parte ſitus impedit, quo minus arterias cum venis ſuis correſpondentibus pro tubis communicantibus habeamus. Quapropter quicquid fluido cuiuis accidit, quatenus iſtiusmodi tubis continetur: id omne quoque ſanguini accidere eatenus debere neceſſe eſt. Atqui in tubis communicantibus fluida vtrinque ad altitudinem ab horizonte in ratione denſitatum inuerſa diſtantem, vi ponderis quieſcunt: nulla igitur eſt ratio, quare ſanguis poſitis iisdem, aequilibrium ſimile non ſeruet? Eadem ratione ſanguis ex tubo breuiore effluit, ſi longior vltra libellam repletur. Similiter in tubo communicante inuerſo omnia ſe habent cum ſanguine, vti cum aliis fluidis modo ſimili.

§. 10. Nihil igitur peccat *Guilielmini*, dum aequilibrium ſanguinis ex ſiphonum conuenientia adſtruit: quicquid contradicant argumenta *Pecqueti*, quae (conceſſa tantiſper illorum veritate) tum demum ſuo ſtarent robore, ſi grauitatio ſanguinis pro ſolo principio motus, non autem pro adiumento tantum venditaretur. Verum enim vero nimis praeceps mihi videtur et minus legitima illatio,

tio, ſi poſita illa conuenientia, ſanguinem grauitate ſua promoueri atque adiuuari ita nude et ſimpliciter ponamus. Ita alter bonam cauſſam male defendit, alter in abuſum vertit.

§. 11. Quaeramus veritatis limites, et videamus, quatenus experimenta artis cum phaenomenis naturae conueniant. Quae omnia vt dilucide diſtinguantur et explicentur, attendendum erit potiſſimum ad diuerſam poſitionem vaſorum, quae in genere duplex eſt; ſiue enim illa ita inter ſe connexa ſunt, vt repraeſentari animo poſſint ceu tubi deſcendentes, quorum crura tubo communicanti inſiſtunt, ſeu ceu tubi aſcendentes, qui ſuis ipſi cruribus inſiſtunt. Cum his aequiparare ſolent arterias et venas ſuperiora petentes; cum illis arteriam magnam et venam cauam cum annexis ſuis in partibus inferioribus. Deinde, aliae erunt apparitiones, ſi ſiphones *vacuos* ſtatuamus; aliae, ſi conſideremus, illos iam eſſe *impletos*.

§. 12. Sint igitur duo tubi A et B, quorum communicans C eſt capillaris. Ponamus tubos vacuos. Impleatur tubus, A, aqua pura, quo facto remotis obſtaculis, videbis, aquam per tubum capillarem C transire celerrime, in tubo B aſcendere, et in A deſcendere eousque et tam diu, donec altitudo aquae vtrinque aequalis fuerit; tum vero aquam quieſcere. Affundatur aqua denuo in tubum alterutrum A: Similiter columna breuior tam diu augebitur, donec maſſa iterum ad aequilibrium et quietem fuerit redacta. Si vero tubus B breuior erit, quam A, ex illo tam diu efluet, donec idem effectus obtineatur. Quo ſubtilior eſt tubus capillaris, eo plus temporis inſumitur tranſitu aquae totali, non Figura 1.

obſtante illa celeritate in principio tranſitus; et quo altior euadit columna aquea, eo longiore mora altitudo aequalis obtinebitur. Preſſio enim, quam aqua in iſtis tubis grauitans exercet, iuxta communes regulas hydroſtaticas ex facto altitudinis in baſin aeſtimari debet.

§. 13. Haec experimenta ad motum ſanguinis adplicita (§. 12.) ſequentia docent: 1.) Si ſupponamus vaſa *vacua* (§. 11.), et iam nunc implenda: omnino fiet, vt ſanguis arteriis infuſus, remoto etiam omni impetu a vi cordis concepto, ſua propria grauitate tandem per extremitates capillares aliosue ductus communicantes, ceteris paribus, in venarum alueos transeat. Quamuis enim non negandum ſit, arterias capillares, quales ſtructura corporis animalis nobis exhibet, longe ſubtiliores eſſe, quam vt vlla arte illarum anguſtias imitando obtinere poſſimus: manent illae tamen nihilominus tubi peruii penetrabiles, et hinc ad obtinendum effectum quaeſitum idonei. Atque in hoc caſu aſſentiendum omnino erit *Guilielmino*. At vero 2.) ſi ſanguis grauitatione ſua vna ſemel vice anguſtias capillarium ſuperauit, atque ad aequilibrium perductus eſt: tum grauitas in aeternum nihil amplius ad motum eius confert; ſed quieſcet ille, vi huius ipſius naturae grauitantis in venis tam diu, donec altitudo eius in arteriis per nouam additionem aucta fuerit. Atque haec proprietas conſtans manet, etiamſi, eadem manente venae capacitate, arteriae diameter ad varias diſtantias extendatur; ſiquidem nihil in aequilibrio fluidi mutatur, etiamſi
Figura 2. tubum $B\alpha$ reſpectu tubi A vel centies amplicaueris. Tantum igitur abeſt, vt ſanguis grauitate ſua ſe promoueat,

ueat, posito semel aequilibrio, vt potius motum sui in venis ob eandem caussam impediat.

§. 14. Quoniam vero vasa naturaliter non sunt inania, sed *plena*, et nos scire oportet, quid in homine perfecto reuera accidat, non, quid accidere possit? omnis quaestio eo reducitur, vt sciatur, an tubus venosus breuior sit, quam arteriosus, et hinc sanguis, quum aorta vltra libellam repletur, ex vena in cor delabatur, et quanto temporis spatio hoc peragatur? Sit igitur aequilibrium sanguinis tam venosi quam arteriosi circa terminum insertionis venae in cor, ad lineam A B. Augeatur san- Figura 3.
guis arteriosus additione noua, vndecunque illa facta fuerit, vsque ad angulum aortae C. Quodsi grauitas vllo modo aliquid contribuere potest ad motum sanguinis, id omne a solo hoc excessu altitudinis, C B, proueniat, necesse est. Cum vero experimenta doceant (§. 12.), quo subtiliores sint tubi capillares, et quo altiores sint columnae fluidi, eo difficiliorem esse transitum, eoque longiorem moram trahi; cum praeterea sanguis tenacitate sua multo vehementius resistat, quam aqua, et hinc motus lentissimus efficiatur, qui cum celeritate motus cordis minime respondet; cum porro basis capillarium in quam pressio exercetur, minima sit; cum denique in homine perfecto et sano circa lineam A B aequilibrium fingere absurdum sit, siquidem sanguis in vasis A D et A E continuus, et longe supra libellam A B et F C, eleuatus sit: ita subducendus mihi calculus videtur, vt enunciandum sit, sanguinis transfusionem grauitatione sua aut plane nihil, aut certe adeo parum promoueri, vt haec vis respectu aliarum potentiarum insigni celeritate agentium pro insensibili et nulla habenda sit.

§ 15. Ne vero huic ſanguinis grauitationi omnem ſuam vtilitatem denegemus; non negligenda erit conditio, quam hactenus vaſis noſtris communicantibus (§. 12.) tacite affinximus. Conſiderauimus nempe effectus, quaſi cum tubis rigidis res nobis eſſet, qui tamen in animalibus elaſtici ſunt (Cap. I. §. 9.) et extenſiles. Quamuis igitur probabile non videatur (§§. 13. 14.), per illam promoueri poſſe transfuſionem per extremitates capillares, aut effuſionem in cor: tamen, quia ſanguis non ſolum in baſin vaſorum, ſed et ad latera illorum (Cap. I. §. 6. 9.) premit: eatenus haec preſſio promotionem ſanguinis in aorta deſcendente adiuuare cenſenda eſt, quatenus latera eius extendere nititur, et capacitatem pro ſanguine recipiendo ampliorem reddit.

§. 16. Reſtat, vt examinemus, quid de tubis aſcen-
Figura 4. dentibus (§. 11.) dici poſſit. Verum quidem eſt, ſi tubi A et B, per capillarem C cohaerentes aqua impleantur, fore vt haec effluat ex tubo longiore, B, etiamſi tubulus C capillaris fuerit: vnde ſequeretur, rationem ſufficientem adeſſe circulationis per vaſa capillaria cephalica, imprimis, quia paullo inferior venae inſertio in cor huic opinioni plurimum fauere videtur. At vero, primo, vt experimentum ſuccedat, ſupponi debet, tubos eſſe repletos: ergo ſanguis in arterias *vacuas* numquam aſcendet. Deinde, ſi ille quoque per aliam quamcunque potentiam non ſolum aſcenderit, ſed et capillares tubulos iam transiuerit, vt in venis ſuo ſolo pondere deſcendere poſſet: id tamen numquam propter ſimilitudinem vaſorum cum ſiphone ſed alias ob cauſſas eueniet. Quia enim ratio phyſica experimenti in preſſione aeris

aeris a grauitante humore adiuta, atque in alterutro tubo ſuperata conſiſtit; in venis autem et arteriis nullus ſeparatus aer cum atmoſphaera externa communicans, ſed aut plenitudo aut vacuum (Cap. I. §. 10.) locum habet: hinc, poſita plenitudine, ſanguis haerebit; poſito autem vacuo cordis antro poſt ſyſtolem, omnino quicquid in venis eſt, deſcendet ob grauitationem ſuam naturaliter deorſum tendentem, non autem, quia ille in tubo communicante longiore continetur. Atque his ſub limitationibus ſpecioſae *Guilielmini* argumentationes verae quidem eſſe videntur; ſed ſi ſcapham ſcapham dicere velimus, figmenta potius quam ſolida adiumenta ſunt. Quid enim lucri denique fecimus? Nihil ſane. Deſcendat enim ſanguis grauitate ſua in vena: quia ſimiliter in arteriarum tractu nulla atmoſphaerae preſſio ob allegatam cauſſam locum habet, nullus quoque ſanguis ſurſum premetur, qui deſcendentem a tergo ſequi poſſit. Vt tacearnus de inſigni ſubtilitate tubulorum capillarium in cerebro, quae neceſſario per hanc preſſionem ſuperari deberet, ſi experimentum hoc ſub initium huius Paragraphi allegatum ad exponendam cauſſam tranſitus ſanguinis per vaſa ſuperiora applicari poſſet.

§. 17. Qui denique perpendit, conditionem poſitionis vaſorum perpendicularis, quae neceſſario ſupponi debet, ſi aliqua ex grauitatione vtilitas redundet, (§. 11.) adeo particularem eſſe, vt non ſolum in homine non ſemper erecto, ſed cubante, nullum locum habeat, ſed et in pluribus animalibus plane exulet; cum tamen in omni hoc caſu nihilominus ſanguinis motus aeque bene et com-

mode procedat; quemadmodum plura animalia ſitum quemcunque e gr. declinationem capitis in paſcuo, ſine turbatione circuli *Harueiani* feliciter affectare poſſunt: ille penitus conuictus erit, quam parum virium in ſanguinis grauitatione pro motu eius facilitando, quaerendum ſit.

§. 18. Ponderatis itaque et excuſſis vtrinque momentis, ſequentes emergunt propoſitiones:

1.) *Sanguis in arteriis et venis inferioribus deorſum tendit, in ſe viciſſim grauitat, et aequiponderat* (§. 5. 12.).

2.) *Sanguis in arteriis ſuperioribus et venis inferioribus grauitate ſua motum ſui impedit* (§. 5. 13. 16.).

3.) *Sanguis in venis ſuperioribus ſuo pondere, conceſſo loco, deſcendit, ſed non poſt ſe trahit ſanguinem arterioſum* (§. 5. 16.).

4.) *Grauitatio ſanguinis mutua aequilibrium producens* (§ 18. 1.) *eſt minima*, ob baſin capillarium infinite paruam, reſpectu altitudinis vaſorum.

5.) *Grauitatio ſanguinis actionem ſuam exſerit potius in latera vaſorum; quam in extremitates capillares* (§. 15.). Nam preſſio grauium aeſtimatur ex facto altitudinis in baſin: atqui in capillaribus baſis eſt infinite parua: ergo haec preſſio in baſin, reſpectu preſſionis ad latera eſt nulla.

6.) *Grauitatio ſanguinis non poteſt annumerari viribus, quarum actione ille ipſe in vaſis inferioribus promouetur et transfunditur*; ſiue: *vis grauitatis ratione reliquarum potentiarum motum ſanguinis generantium eſt nulla* (§. 7. 14.). Aequilibrium enim non producit motum, ſed quietem (§. 13.).

Sectio

Sectio 2.

De actione et viribus Cordis.

§. 19. Dum in cauſſam, quae ſanguinem ex corde expellit, inquirimus: ſedulo abſtinebo, ne conſiderando momenta hypotheſium exploſarum de ebullitione, fermentatione, flammula cordis etc. tempus inutiliter teram, quod meditationis genus pro peccato philoſophico ſemper habendum duxi. Eſt enim modus alius magis rationalis, qui accuratius expendi meretur, et qui in actione cordis conſiſtit.

§. 20. *Cordis* autem *actio* hac fere ratione ſe habet, vt ventriculorum latera, quibus cauitates illius ad plenitudinem vsque repletae terminantur, propius ad ſe accedant, et harum ipſarum cauitatum capacitatem minorem efficiant, quam vt priſtina ſanguinis quantitas in illis contineri queat: cuius effectus igitur proximus ille eſt, vt id, quod contineri non poteſt, extra cauitates cordis aliorſum exprimatur.

§. 21. Haec *actionis* idea (§. 20.) non niſi phaenomenis ſuperſtructa a nemine in dubium vocatur: ſed ex diuerſo conſiderandi modo diuerſae quoque aeſtimationes virium illam actionem producentium obortae ſunt, quas ſatis graphice Iurinus perſtrinxit, quarumque defectus praecipuos indicauit. Ceterum ſi *noſtra* methodus ad veritatem et naturam magis acceſſerit, *aliorum* ſententiis damnandis ac refutandis immorari eo ipſo ſuperſedebimus.

§. 22.

§. 22. Nullus autem datur motus, qui maiorem ſimilitudinem habet, et facilius comparari poteſt cum praedicta contractione cordis et inde producta expulſione ſanguinis (§. 20.), quam motus fluidi intra canalem aliquem ſeu tubum contenti, ab vrgente embolo ſuperficiei alterutri applicito in motum concitati. Nam dum Embolus truditur, capacitas tubi continuo minuitur, et tantum fluidi extra tubum eiicitur, quantum in ſpatio, quod embolus ſenſim ſenſimque occupauit ac transiuit, poterat contineri. Cum igitur quantitas fluidi expulſi dependeat praeciſe ab anguſtata tubi capacitate: perinde erit, quomodocunque capacitas minuatur, ſiue trudendo embolum, ſiue, applicando ad ſe propius latera canalis: et, ſi decrementum cauitatis aequale eſt in vtroque caſu, eodem tempore; volumen expulſi fluidi eodem tempore etiam aequale futurum eſt.

§. 23. Quando embolus in fluidum oppoſitum agit: tum vis tota emboli quouis momento adplicita quouis momento iterum conſumitur, totum fluidi volumen in motum ciendo; et quo momento embolus agere ceſſat, motus quoque fluidi intra canalem contenti ſiſtitur, et ſola illa fluidi pars, quae proiecta ſuit, motum ſuum data velocitate continuat. Quando igitur motus totius fluidi per datum tempus durare debet; vis quoque illa tota, quouis tempuſculo, ſiue integro illo tempore denuo et continuo inſtaurari ac repeti debet. Contra vero ſe res habet in percuſſione corporum ſolidorum; ſi enim corpus ſolidum, A, vi data, in aliud ſolidum, B, impingit, illique omnem, quo polluit, motum communicat: tunc cor-

corpore A in quiete ſubſiſtente, nihilominus totum corpus B motum ſuum, pro virium excitatarum quantitate continuat. Actio igitur cordis non in percuſſione, vel ſimplici quodam ictu conſiſtit: ſed nulla commodiore et magis propria appellatione, quam *Truſionis* voce inſigniri poteſt; quae quidem *Truſio, eſt continuata et temporibus infinite paruis per ſummam ſpatiolorum infinite paruorum repetita emboli ad fluidum (ſiue, facta applicatione, laterum cordis ad ſanguinem) mouendum applicatio; et quantitas Truſionis eſt quantitas et ſumma omnium ictuum, quibus vis cordis per ſpatium datum, tempore dato, ſanguinem oppoſitum in motum egit.* Si quis autem eſt, cui haec truſionis vocula non arridet, et qui *preſſionem* ſubſtituere malit; illi non refragabor: modo per illam non intelligatur nuda et mortua ſollicitatio ad motum, ſed per quam motus actu producatur talis, qualis in data definitione noſtra determinatur ac reſtringitur.

§. 24. Quando cor actionem ſuam exerit (§. 20.), illius volumen ſecundum omnem dimenſionem decreſcit; abſoluta autem actione ad priſtinam extenſionem reducitur. Atque haec dimenſionum variatio reciproca per viciſſitudines aequabiliter ad ſenſum continuatur. Ea autem proprietas, qua fibrae certa vi dilatatae ſeu tenſae, ſublata illa vi ad priſtinam figuram redeunt, non aliunde prouenire ſcitur, quam ex eo, quod ſint elaſticae. *Vis* igitur *cordis eſt Elaſticitas cordis.*

§. 25. Quia Cordis actio in eo conſiſtit, vt latera ventriculorum propius ad ſe accedant, atque iterum dimoueantur (§. 20.); *Vis ventriculi cuiuslibet eſt elaſticitas late-*

laterum; haec autem *elaſticitas laterum* eſt *aequalis ſummae elaſticitatum* huc conſpirantium ſingularum *fibrarum*, *ex quibus latera* ventriculi *componuntur*.

§. 26. *Quantitatem* Virium cordis ſi determinare velimus: ante omnia aequiuocas et vagas ſignificationes ſemouere oportet: quaeſtio enim triplici ſenſu proferri, atque in tres alias diuidi poteſt, quae bene inter ſe diſtingui debent, ſi ſufficienter reſpondere velis. *Primum* enim problema hoc eſt: Quanta eſt vis ſeu elaſticitas cordis abſoluta; ſiue: quanta celeritate latera ventriculorum ad ſe accedunt, ſublata omni reſiſtentia? *Altera* quaeſtio haec eſt: ſi cor agit tota elateris ſui intenſitate, et ſanguis expreſſus per medium non reſiſtens traiici debet; quanta eſt illa vis, qua ſanguis exprimitur? ſiue, quanta eſt celeritas, qua ſanguis cordis ventriculos egreditur? *Tertius* problematis ſenſus hic eſt: ſi ſanguis per medium reſiſtens traiici debet; quanta eſt illa vis cordis, quae ſanguinem in vaſis promouet? ſiue, quanta celeritate ſanguis mouetur in arteriis elaſticis, plenis, vi cordis?

§. 27. Facile patet intelligentibus, quod ſenſus problematis *primi* (§. 26) proprie inuoluit *vim* cordis *abſolutam*, ſubiectiuam, et cordi ipſi inhaerentem, eſſentialiter conſideratam, et ab omni effectu abſtractam; patet porro, quod haec vis ſubiectiua maneat conſtans et ſemper eadem, mutatis vtcunque conditionibus aliunde accedentibus; patet denique, quod aequalis ſit illi vi, qua ſanguis iuxta ſenſum problematis ſecundi et tertii eiici debet ex corde per medium ſiue reſiſtens, ſiue non reſiſtens. Si igitur huius Vis ſeu Elaſticitatis quantitas aſſignari poſ-

ſet

ſet menſura quadam, omnia dicta problemata facile reſoluta forent. Vbi enim Vis eſt eadem; ibi effectus quoque idem erit quantitate, et nonniſi diuerſo applicandi modo diſſentiens. Agedum igitur, et proſequamur, vsque dum licet inſtitutum, inueſtigando et comparando proprietates illas, quae ex ſpeciali elaſticitatis conſideratione atque applicatione poſſunt deduci. En autem ſequentes.

§. 28. Fibra eadem elaſtica diuerſo tempore varios elateris gradus poſſidere poteſt, qui quidem maxime ab eius laxitate aut rigiditate pendent. Vis autem cordis eſt elaſticitas cordis (§. 24.): *Creſcente* igitur hoc *elatere*, cuius fibrae laterum (§. 25.) capaces ſunt, *aut decreſcente*, *vis cordis augetur vel minuitur*.

§. 29. Fibra elaſtica eadem diuerſo tempore magis et minus tendi ac produci poteſt. Idem accidere poteſt fibris duabus aequalibus, eodem tempore. Fibra autem tenſa et producta vires maiores adquirit, quo magis producitur, et aucta elateris intenſitate augetur virium quantitas. *Vis* igitur *cordis* pro tenſione fibrarum ſuarum, ſiue pro intenſitate elateris ſui *varie intendi*, minui atque augeri *poteſt*; et *duo corda* fibrarum *elaſticitate aequalia* eodem tempore *diuerſa* elaſticitatis et *virium intenſitate* poſſunt gaudere.

§. 30. Experientia conſtat, cordis actionem eſſe nunc celeriorem nunc tardiorem; nunc fortiorem, nunc debiliorem. Actu igitur euenire diſcimus, cuius poſſibilitas ex natura rei (§ 28. 29.) eluceſcit: quod videlicet *Vis cordis ſua patiatur augmenta et decrementa*.

§. 31. Quia variante intenſitate virium cordis numerus fibrarum latera ventriculi componentium conſtans manet: vis elaſtica cordis non a fibrarum numero ſolo producitur, ſed aliunde fibris ſuperadditur. *Non* igitur *vis cordis eſt in ratione maſſae*, niſi ſingulae fibrae elaſticitatibus reſpectiuis et correſpondentibus, tam quoad magnitudinem et gradum elateris (§. 28.) quam quoad intenſitatem (§. 29.) aequalibus gaudeant.

§. 32. Intenſitas virium cordis ſequitur intenſitatem elateris fibrarum, ex quibus latera ventriculorum componuntur: intenſitas autem elateris fibrae ſequitur rationem virium, quibus tenditur, ſeu producitur. Quo magis igitur ventriculorum latera a ſe inuicem remouentur, eo maior eſt vis, qua ad ſeſe accedere nituntur. In eo autem temporis puncto, quo fibra tenſa a vi producente ſibi relinquitur, vis producens omnium antecedentium eſt maxima, hinc et intenſitas elaſticitatis omnium praecedentium maxima. Quapropter, quando *in ſyſtole Cor* agere et contrahi incipit, *celeritate maxima mouetur*, quam intenſitas elateris in antecedente diaſtole concipere poterat.

§. 33. Si vires, quibus latera producuntur, tantae ſunt numero vel quantitate, vt, ſi fibrae tenſae vlterius producerentur, elaſticitatem ſuam plane amitterent: erit ille gradus intenſitatis ſummus; ſiue, tunc erit *vis cordis* omnium poſſibilium *maxima*. Si contra vires tendentes tam exiguae ſunt, vt, ſi vlterius minuerentur, plane nulla laterum productio oriretur: erit ille *gradus* intenſitatis *minimus*. Similia accidunt, ſi fibrae aut ſumme robuſtae ſunt,

ſunt, aut ſumme debiles, vnde gradus elaſticitatis maximus aut minimus oritur (§. 28.).

§. 34. *Cor* ſemper *agit vi tota, qua animatum* ſeu vigoratum *eſt*: Sed non gaudet ſemper elatere, cuius capax eſt, (§. 28.) maximo aut minimo; neque agit ſemper elaſticitatis, quam poſſidet, intenſitate omnium poſſibilium maxima aut minima (§. 29. 33.); imo fortaſſe numquam ad hos duos gradus extremos peruenitur, niſi in acutiſſima febre, et in articulo mortis.

§. 35. Ex hactenus deſcripta (§. 25-34.) Cordis *Elaſticitate* ſecundum omnes ſuas proprietates et circumſtantias conſiderata haec emergit Vis ſubiectiuae (§. 27.) et abſolutae definitio: *Eſt Vis cordis in ratione compoſita ex numero fibrarum conſpirantium* (§. 31.), *quantitate Elateris* (§. 28.), *et intenſitate eius* (§. 29.). Quemadmodum vero nulla vis ſecundum eſſentiam ſuam et geneſin conſiderata menſuram admittit, ſed haec demum ex comparatione effectuum obtinetur: ita etiam praeſens noſtra virium Cordis deſcriptio ad vlteriorem aut vberiorem cognitionem viam non aperit. Nemo enim numerum fibrarum elaſticarum, nemo magnitudinem aut intenſitatem Elateris, ſaltim generaliter, aſſignare poteſt, vt cum effectibus inde ſequentibus comparatio inſtitui poſſit. Praeterea in fibris elaſticis ſibi relictis actio Elateris tota eſt ſubita et quaſi momentanea eſt igitur *actio cordis libera*, abſoluta, ſiue *congreſſus* laterum, ſublatis omnibus reſiſtentiis *momentaneus*, vt nullam temporis rationem in hoc negotio habere liceat. Iſtiusmodi igitur proprietates, etſi ſcopo noſtro quodammodo

fauent, certe non ſatisfaciunt. Quapropter videamus, quousque in indaganda virium aeſtimatione per *effectus* penetrare poſſimus.

§. 36. *Effectus* autem *proximus* is eſt, vt ſanguis in ventriculi cauitate contentus extra illam protrudatur (§. 20.); qui quidem iam eiectus aut curſum ſuum emetitur per medium non reſiſtens, aut corporibus reſiſtentibus (§. 26.) obiicitur. Illam *Velocitatem* ſanguinis, qua per medium non reſiſtens, transfertur, dicemus velocitatem *abſolutam*; alteram vero, velocitatem *reſpectiuam*.

§. 37. In huius celeritatis *abſolutae* (§. 37.) aeſtimatione perpendenda potiſſimum occurrunt ſequentia. 1.) *Capacitas ventriculi*, et *Maſſa ſanguinis* quae omnino tanta aſſumi poteſt, quanta in ventriculo non ad ſummum gradum (§. 34.) extenſo continetur. 2.) *Sectio orificii*, per quod illa Maſſa eiicitur. 3.) *Tempus*, quo *motus* cordis abſoluitur; quibus quidem datis, celeritate iſta ſanguinis abſoluta determinatu nihil facilius eſt. Conſideretur enim Maſſa ſanguinea in ventriculo contenta, tamquam figurae regularis, cuius volumen efficiat cylindrum datae altitudinis a ac diametri ſiue ſectionis $d = a\,d$. Quia motus ſanguinis ex ventriculo cordis in aortam ſequitur leges motus fluidi in cylindro vi emboli truſi (§. 22.), erit *Celeritas ſanguinis* per orificium fluentis ad velocitatem eius in ventriculo *in ratione ſectionum reciproca*: et volumen illud cylindricum in ventriculo $= a\,d$ mutabitur exeundo per orificium, in volumen aliud $= \alpha\,\delta$, cuius baſis eſt ſectio orificio $= \delta$, altitudo autem $= \alpha = \frac{a\,d}{\delta}$ in ratione directa voluminis cylindrici intra ventriculum, et inuerſa ſectionis

Figura 5.

nis orificii. *Celeritas* igitur *totius maſſae ſanguineae extra cor proiectae* ea eſt, vt in tempore, quo cor contrahitur emetiatur ſpatium $= ad : \delta$, quod eſt ad altitudinem cylindri ſanguinei in corde, vti eſt huius cylindri ſectio ad ſectionem orificii; et *vis cordis* (§. 35.) *tanta* eſt, *quanta* requiritur, vt maſſa proiicienda cum dicta celeritate feratur.

§. 38. Sed haec omnia (§. 37.) nimis generalia ſunt, et calculum iſtum numero determinato, et cum phaenomenis naturae congruente exprimere, omnino impoſſibile. Quamuis enim primo loco videatur, maſſam eiiciendam aſſumi poſſe tantam, quantam ventriculus non ad ſummum gradum tenſus capit: id tamen pro certo affirmare non licet; quia non conſtat, an contractio laterum abſoluta, ſublatis omnibus reſiſtentiis exercita omnem plane cauitatem tollat? multo minus experimentando res in tuto collocari poteſt. Deinde nec tempus ſciri poteſt, quo motus iſte abſoluitur. Quemadmodum enim dici non poteſt, illum fore momentaneum, pari modo, ac ſi latera coeuntia nullam reſiſtentiam (§. 35.) paterentur: ita nec tempori, quo ſyſtole talis, qualis in corpore animali reperitur, peragitur, aequiparari poteſt. Sola ſectio orificii patet ſcrutinio anatomico, quae quidem ibi quaeri debet, vbi valuularum ſemilunarium radices ſunt applantatae, et ſemper conſtans manet, quia ſanguini exeunti nihil reſiſtere ſupponitur.

§. 39. Fac autem conditiones in hoc caſu ſecundo (§. 37.) omnes eſſe datas: dolendum tamen eſt, illum a natura abhorrere. Non enim ſanguis e corde proiectus vacuum

vacuum transilit; ſed ſtatim, atque orificium egredi annitur, pluribus reſiſtentiis obiicitur. Praecipuum igitur *Problema* (§. 26.) *de* determinanda *celeritate* ſanguinis *reſpectiua* adhuc remanet; quod quidem eo difficilius reſolutu ſemper fuit, quo minus illarum *reſiſtentiarum* menſura cognita fuit; ſine qua tamen in aeſtimatione virium per effectus multum proficere impoſſibile eſt. Videlicet Cor in ſanguinem arterioſum non agit immediate, ſed portioni tantum intra ventriculos ſuos contenti atque exeunti motum certum imprimit, qualem concipere (§. 37.) docuimus, et qui deinde cum reliqua maſſa extra cor ſubſiſtente communicatur. In aeſtimando autem motu portionis exeuntis non ſolum denuo ad omnia illa adtendendum eſt, quae (§. 37) monuimus, et conſtantia manent; ſed praeterea id, quod differentiam inter motum eius abſolutum et reſpectiuum (§. 36.) conſtituit, cognitum eſſe, et omnium *reſiſtentiarum* differentiam iſtam conſtituentium exacta *ſcientia* haberi debet.

§. 40. Ante omnia autem ſollicitos nos eſſe oportet, *quaenam* illa obiecta ſint, quae verae *reſiſtentiae* dici poſſint, ne de non-entis alicuius affectionibus verba facere videamur. Et inter has quidem absque omni dubio primo loco *valuulae ſemilunares* ad principia arteriarum collocatae (Cap. I. §. 15.) conſiderandae ſunt; quae quidem non ſui ipſarum mole reſiſtunt, ſed eatenus exitum ſanguini truſo negant, quatenus ſanguis in aorta contentus, et ab antecedente arteriae contractione valuulas verſus directus his ipſis inſiſtit, et ſuo pondere (§. 18. n. 2.) ſibi apprimit.

§. 41.

§. 41. Inter *reſiſtentias* cordi obiectas porro numerari ſolet *omnis* reliqua *maſſa ſanguinea* in omni *arteriarum* tractu delitescens: adeo immiſericordes fuere hactenus Virium aeſtimatores, vt tantum oneris mouendi exili cordis potentiae hactenus imponerent. Siquidem iſti fere omnes, (ſi *Morlandum* excipias, cui tamen id *Iurinus* vitio vertere velle videtur) tamquam indubitatam veritatem aſſumſerunt, actione cordis totam maſſam ſanguinis arterioſam eodem tempore in motum cieri, et ſanguinem propterea ſyſtoles tempore in venas traiici. Equidem in Capite primo (§. 36. 37. 43.) adſtruere conatus ſum, ſanguinis transfuſionem ex arteriis capillaribus in venas non fieri tempore ſyſtoles cordis, vnde ſequeretur, actionem cordis non eſſe illam, quae totius maſſae ſanguinis arterioſae motum immediate producat, non igitur vim cordis neceſſario eſſe tantam, vt huic motui producendo par ſit. Quodſi praeterea conſidero: contrariae ſententiae Fautores illam aut precario aſſumere, aut argumentis quidem, at plane non idoneis, qualia Bellinus ſuppeditauit, fulcire; neque minus illa poſita omnem rationem tolli, quare aut arteriae dilatentur, aut quare arteriae et venae non ſimul, imo venae prius et tum arteriae dilatentur, et ſanguis eodem tempore quo ventriculum ſiniſtrum exit, non in dextrum (Cap. I. § 41.) delabatur? Haec mea ſententia, quod *non totus ſanguis arterioſus actione cordis moueatur eodem tempore*, etſi nondum plenarie euoluta aut mathematice demonſtrata; tanta tamen euidentia radiat, vt facile auderem illam pro principio in ſequentibus adhibere. Sed ne moleſtus euadam rigoroſis quibusdam examinatoribus; malo illam, vt nondum iudicatam relinquere, et

ex vlterioribus meditationibus circa modum, quo sanguis e corde proiectus sanguini arterioso motum communicat, tamquam corollarium deducere.

§. 42. De *arteriis* non satis conuenit inter scriptores. Alii enim similiter illas numerant inter *resistentias*, cordis viribus obiectas, et impedientes, ne sanguis vbique eadem celeritate progrediatur: alii autem in ipsis inueniunt principium motus sanguinis continuandi. Proueniunt sine dubio propositiones istiusmodi contrariationis speciem prae se ferentes, ab ideis vagis, ne dicam, falsis. Studeamus igitur singulis terminis assignare valorem suum iustum ac determinatum.

§. 43. Quodcunque corpus A alii corpori B, siue moto, siue ad motum vi quacunque sollicitato ita obiicitur, vt aut huius B motus minuatur, aut plane cesset, manente aut mutata eius directione, illud corpus A huic corpori B resistere dicitur. Haec resistentia corporis A proficiscitur a conatu in statu suo perseuerandi, qui conatus motui corporis B contrarius a physicis plerumque vocatur *Reactio*. Atque haec reactio semper aequalis est actioni siue quantitati impetus, quam corpus in obiectum irruens consumit, illam resistentiam superando. Quodsi igitur latera arteriae sint *rigida*, vt reactio illorum aequalis sit toti pressioni, quam sanguis exercet; in hoc casu arteria quidem quam maxime resistit, sed tamen ita, vt non nisi directio ad latera mutationem patiatur, motus autem progressiuus nullam plane celeritatis iacturam (sepositis frictionibus) faciat. Haec igitur *resistentia*, quae in illo temporis momento locum habet, quando arteria satis dila-

dilatata (§. 33.) eſt, non niſi *imaginaria* eſt; quod quidem Dynamices gnaris absque vlteriore deductione luculenter patet. Sint autem latera arteriae *claſtica*, determinata quadam vi producenda: tum illa irruenti ſanguini tam diu reſiſtunt, donec vis elaſtica a vi illa determinata ſuperata fuerit; quo facto extenduntur, cedunt, et fugiunt quaſi ſanguinem. Haec igitur *laterum extenſibilitas* ſiue vis elaſticae oppreſſio pro *reſiſtentia* et reactione *vera* haberi meretur, partim, quatenus in cauſa eſt, cur ſanguis directionem ſuam verſus latera retineat, et progreſſum verſus extremitates arteriarum neglgat aut ſuſpendat, partim, quatenus portio determinata virium extendendis lateribus conſumitur, et ſanguis corde expulſus minore maſſa et minore celeritate, id eſt, tota impetus quantitate, quam a cordis impetu conceperat, diminuta progrediatur. Sin latera extenſa *in* ſui *reſtitutionem* nitantur, et hinc non modo reactione ſua totalem ſanguinis impetum deſtruant, ſed etiam *exceſſu virium* elaſticitatis illi nouum *motum imprimant*, tunc adeo nullam reſiſtentiam in hoc caſu fingi aut concipi oportet, quin potius haec *reactio* pro *adiumento* motus circulatorii haberi debeat. Denique, quia aliunde, vt demonſtratum aſſumitur, vaſorum capillarium anguſtias magnam remoram obiicere fluido transeunti, vaſa autem arterioſa in extremitatibus ſuis adeo anguſta ſunt, vt vix vnico ſanguineo globulo minimo ſimul tranſitum concedat: igitur haec extremitatum *anguſtia inter reſiſtentias* ſanguini arterioſo obiectas ſemper *habita* fuit. Atque hanc quidem *normam* in ſequentibus ſeruandam putem, ſi veram *virium* reſiſtentium *aeſtimationem* inuenire velimus. Sed ad rem propius accedamus.

§. 44. *Reſiſtentiam* igitur *primam* (§. 40.) ſanguini extra cor proiiciendo obiiciunt *valuulae* cum ſuper incumbente ſanguine, cuius quidem vis dupliciter conſiderari poteſt, quatenus ſuae propriae maſſae pondere reſiſtit, et quatenus ab aorta in ſui contractionem nitente valuulis apprimitur. Huius autem molis quantitas aſſumitur tanta, quanta comprehendi concipitur ſub baſi, quae aequalis eſt ſectioni aortae proxime ad valuulas, et ſub altitudine a valuulis vsque ad ſummam arteriarum cohaerentium faſtigium menſurata. Etſi enim tanta praeciſe quantitas valuulis actu non incumbat: tamen, quando iſta maſſa vt quieſcens et non niſi ſuo pondere reſiſtens ſupponitur, huic *menſurae indicatae*, quae in omnibus fluidis grauitantibus obſeruatur, neceſſario locus concedi debet.

Figura 6. §. 45. Dum valuulae clauſae *a* ſibi inuicem accumbunt, illarum orae *b* triangulum formant, et a lateribus aortae *d* quam longiſſime diſtant. Eſt igitur illarum inclinatio ad aortam minima, et angulus incidentiae filorum ſanguineorum valuulis inſiſtentium A C B *a c* B maximus, hinc et preſſio illorum maxima. Concipiatur iam valuula propius ad aortam accedere, et eius inclinatio
Figura 7. creſcere, vt in A C D: tum Baſis Cylindrica (§. 44.) dicta diminuitur in ratione, quae eſt vt C B (= C D): E D; neque minus preſſio ſanguinis deorſum pellens valuulam eleuatam C D, eſt ad preſſionem, qua valuulae infimo loco poſitae C B inititur, in ratione C F (= E D): C D et ſimiliter decreſcit. Quo magis igitur valuulae aperiuntur, eo minus reſiſtentiae ab incumbente cylindro ſanguineo patiuntur. Et hoc *reſiſtentiae decrementum* aeſtimari poteſt

poteſt *in ratione quadrata ſinuum* E D *angulorum inclinationis* E C D.

§. 46. Haec ex *vna* ſuperficie (§. 45.) valvularum accidunt. Videamus, quid fiat ex *altera*. Sunt autem per omnia eadem. Quo magis valvulae eleuantur, eo minus ſanguinis impetu directo in illas impingere poteſt. Decreſcunt enim ſimiliter baſes C F, C*f*. in ratione eorundem ſinuum angulorum inclinationis E D (§. 45.). Porro, quo propius valvulae inclinantur ad arteriarum latera, eo debilior etiam fit impetus ſanguinis in illas, ſeruando itidem rationem (in quacunque virium hypotheſi illam aeſtimare velis) quantitatis ſinuum eorundem angulorum. Quo magis igitur valvulae aperiuntur, eo minus virium ad illas eleuandas applicatur. Figura 7.

§. 47. Quamuis autem reſiſtentia a ſanguine valvulis inclinationem ſuam mutantibus (§. 45.) incumbente producta minuatur: tamen non putandum eſt, hoc reſiſtentiae decrementum inferre totalem eius abolitionem. *Sola applicatio* hic mutatur. Dum enim valvulae aperiuntur, a ſe inuicem diſcedunt, et foramen quoddam formant, per quod ſanguis aut ex ventriculo in arterias, aut ex ventriculo in arterias, aut ex his viciſſim in ventriculum labi poſſit. Quantum igitur baſis columnae ſanguineae valvulis inſiſtentis decreſcit; tantum accedit baſi columnae, quae huic fienti foramini inſiſtere fingi debet.

§. 48. *Reſiſtentia* igitur, ſanguini extra cor prorumpere nitenti, *a maſſa* iſtius columnae (§. 44. 45.) *oppoſita ſemper manet eadem* et aequalis ponderi cylindri ſanguinei, cuius menſuram (§. 44.) indicauimus.

§. 49. Similiter, quamuis impetus ſanguinis in valuulas irruentis diminuatur, partim ob decrementum maſſae allabentis, partim ob mutatum angulum incidentiae (§. 46.): non tamen inde totalis quies infertur. Quo magis enim valuulae a ſe diſcedunt inuicem, eo maius foramen in ſui medio relinquunt. *Quo minus* igitur *ſanguinis in valuulas irruit, eo plus per foramen amplificatum erumpere* conatur.

§. 50. Quia autem valuulae aperiuntur ſenſim, ſiue quia non in inſtanti foramen illud (§ 47.) fieri ſupponitur: *Sanguis* concipi poteſt, quaſi *erumpat* per illud *ſub forma* Figura 8 *pyramidis* cuiusdam triangularis, cuius latera ſunt quodammodo concaua. Neque ſectio huius pyramidis Fig. 8. melius comparari poteſt, quam cum ſectione gladii cuiusdam tripennis. Qualis autem ſit ratio inter diuerſas eius diametros, id quidem ſcitu difficilimum, imo plane impoſſibile eſt; ſiquidem illius infinitae variationes eſſe poſſunt, Figura 9. ex. gr. A. B. C. D. quarum determinatio partim a quantitate virium cordis, illarumque applicatione, partim a flexilitate valuularum, partim a conſtitutione aortae tam quoad eius elaſticitatem, quam capacitatem, dependet, et quae per experimenta nullo modo indagari aut definiri poteſt.

§. 51. Patet ex propoſitis (§. 44-50.), *Vim cordis* (§. 35.) per effectus conſideratam (§. 39.), generaliter dici poſſe *tantam, vt ſanguis in Corde contentus et expulſus certam velocitatem* (§. 37.) *nanciſcatur, qua pars feratur in valuulas* (§. 44.), *illasque ſuperato pondere incumbentis ſanguinis ad latera aortae admoueat, pars vero per rimam datam intra columnam ſanguineam tamquam cuneus traiiciatur, et diuerticulum ſibi efficiat.* Nondum licet

licet determinare ſtrictius, *quale* ſit illud diuerticulum, et quomodo fiat? nondum enim reliquas reſiſtentias omnes examinauimus. Interim operae pretium videtur, *methodum* qua haec omnia peraguntur, quantum licet, propius examinare.

§. 52. Diximus (§. 50.), ſanguinem e corde prorumpere per datam valuularum rimam *ſub forma pyramidis* cuiusdam. Haec autem rimula ſub initium motus neceſſario quam minima eſt, vt non niſi guttula ſola, apicem pyramidis conſtituens transmittatur. Iſta ſanguinis guttula impetum facit in ſanguinem arterioſum quieſcentem velocitate data, et duos imprimis effectus praeſtat, partim vt guttulas ſanguineas in prima ſectione f. 10. 1. aortae contentas dirimat, partim, vt ſeruata directione ſimiliter per ſectionem ſecundam, tertiam &c. viam ſibi paret, idque tam diu, donec vires ſuae abſumtae ſunt. Videmus enim, ſi in vas fluido repletum, aliud fluidum homogeneum ex altitudine data guttatim decidat, illud non in ſuperficie in momento contactus cohaerere, ſed ad certam quandam profunditatem pertingere, donec vis ſua cadendo ſub finem lapſus acquiſita iterum euaneſcat. Figura 10.

§. 53. Dum igitur *prima* ſectio diuiditur, omnibus globulis in area ſectionis illius contentis motus communicatur, et dum locum cedere irruenti globulo coguntur, ſibi ipſi nouum ſpatium, quo ſe propripiant, quaerere annitantur. Exercent autem preſſionem tam ad latus aortae, quam in ſuperincumbentem ſanguinis maſſam, a quibus viciſſim duplicem reactionem patiuntur. Etiamſi autem ſuperincumbens maſſa non niſi ſuo pondere reſiſtat, Figura 11.

et

et tamquam vis mortua absque vlla velocitate consideranda sit: tamen, quia (sublata extensibilitate arteriarum) vi impenetrabilitatis suae (Cap. I. §. 6.) ista loco cedere non potest, quin et totalis massa sanguinis tam arteriosi quam venosi antecedens simul promoueatur: non modo prima illa pyramidis guttula, sed et tota sectio respectu massae sanguinea vniuersae, pro infinite parua, et vis sua, qua columnam reliquam impetit pro nulla, aut certe non pro tanta haberi potest, quanta ad superandam reactionem requiritur. Columna igitur ipsa in hoc casu immota persistit. At vero longe alia ratio est inter aream primam sanguineam, et sectionem lateris elastici aortae ipsius. Quia enim aorta plena vbique est, et hinc perimeter ipsius sanguini vbique arcte accumbat: nullum punctum in illa perimetro concipi potest, quod non ab accumbente sanguine pressionem sustineat. *Vis* igitur *omnis*, *quam area ista a prima guttula concepit*, *in extendenda perimetro aortae consumitur*, quae extensa locum concedit guttulae, quem superincumbens massa denegabat.

§. 54. Quae huic *primae* guttulae (§. 52.) circa primam sectionem (§. 53.) accidunt; ea omnia, ceteris paribus in *secunda*, *tertia* etc. Sectione repetuntur, eousque, donec omnis guttulae vis sit consumta. Neque putandum est, postquam haec guttula primam sectionem transgressa fuerit, perimetrum aortae statim iterum contrahi atque coarctari. Dum enim immediate proximae pyramidis guttulae antecedentem primam a tergo insequuntur, illae diametrum aortae iam dilatatam non solum in eo statu seruant sed etiam pro ratione quantitatis vlterius dila-

dilatant; quod omne de reliqua pyramidis portione, verum esse putandum est. Haec autem dilatatio laterum aortae tam diu durat, donec aut vis sanguinis irruentis ipsa minuatur, aut aorta vlteriorem expansionem non ferat, sed elatere suo speciem rigiditatis induat, aut vtrumque fiat, et proiectioni sanguinis terminus figatur.

§. 55. Missa autem ista consideratione, aliqua etiam ponderatione opus est *moles sanguinis quauis systole* e corde *proiecti*. Plerique scriptores physiologi, circa determinationem virium cordis occupati, quantitatem sanguinis in ventriculo contenti et eiecti vnam eandemque audacter statuunt, et in calculis suis vnciam vel vnam vel duas adhibent, et hinc ventriculos totaliter depleri aut aperte affirmant, aut tacite supponunt. At vero fateor mihi omnia suspecta videri et dubia, quae in istiusmodi rebus nondum satis expositis, absque demonstrationibus ac precario pro veritatibus stabiliuntur. Nemo igitur vitio mihi vertet, si hypothesin istam, quae quantitatem sanguinis eiecti ad capacitatem ventriculi mensurat, falsitatis arguere audeam. Non nego, omnem sanguinem in ventriculo contentum in motum ciri, id enim ex natura systoles (§. 20. 22.) necessario sequitur; sed de eo dubito, *an omnis ille sanguis* etiam *vnica systole exterminetur*?

§. 56. Nondum quidem locus est, integram demonstrationem veritatis, quaecunque illa denique fuerit, hic intexere: quia tamen nihil eorum in hoc capite omittendum censeo, quae ad mensuram virium cordis quodammodo facere possunt; relictis iis, quae de intensitate illarum (§. 28-35.) dicta huc transferri possent, vnicum momentum indi-

cabo, quod consideratio memoratae pyramidis (§. 50.) sanguineae nobis suppeditat. Supponimus nimirum, vim sanguinis e corde irruentis tantam, vt resistentias tam a grauitatione columnae sanguineae, quam aliunde obortas vincere possit. Non dubium est, quin haec duo in se inuicem reagentia (§. 40-43.) sub finem systoles ad aequilibrium primo reducantur, mox vero impetus ille sanguinis a resistentiis dictis vicissim superetur. Quodsi igitur vel maxime probaueris, ventriculorum latera exactissime claudi tempore systoles: cessante tamen illa nihil est,
Figura 12. quod sanguinem *a* intra limites valuularum *b* consistentem vlterius protrudere possit. Quapropter si nullus alius, *ille* saltim *sanguis tempore diastoles in ventriculos relabitur*.

§. 57. Diu fateor haesit meditatio nostra circa vnicum hunc angulum (§. 40.); quae tamen vel hoc solo nomine fertilissima dici meretur, quod tam foecundas et omnino vtiles considerationes nobis suppeditauit: siquidem inter alia denuo luculenter patet tam necessitas quam ratio iam aliquoties allegati phaenomeni *Harueiani* (Cap. I. §. 18.); quod nimirum in momento systoles cordis aorta proxime applantata dilatetur, vnde iam diuerticulum illud (§. 51.) quadantenus innotescit. Quamuis autem facile concedam, naturam multo citius negotium suum absoluere, quam nos aut cogitando aut scribendo legendoue assequi valeamus: hoc tamen etiam neutiquam erit diffitendum, illam, etsi velocissime, non tamen per saltus, sed pedetentim procedere, et hinc eo cautiores pedissequos poscere, quo facilius in tanta festinatione ab ipsius via vera declinare, et in errorum labyrinthum delabi possimus.

simus. Iam vero promoueamus pedem aliquantulum, et pressius insistamus arteriarum dilatationi, indaguturi, *quousque illa eodem systoles synchronismo secundum tractum ramorum terminetur*? Ad hanc enim quaestionem si sufficienter respondere possimus, facile erit diiudicatu, quomodo disputatio illa (§. 41.) de quantitate massae a corde mouendae, dirimi debeat. Ad quem scopum vt pertingamus, duo imprimis problemata simul nobis enodanda occurrunt, quae autem omnia mirifice inter se cohaerent; nempe: *an arteriae omnes et singulae in toto corpore simul dilatentur, vi eadem cordis vnica? et quanta in genere dilatatio esse soleat?*

Sectio 3.

De actione Arteriarum.

§. 58. Seposita tantisper quaestione prima respiciamus ad alteram; *quanta* nimirum *dilatatio* esse soleat? Sine omni dubio generatim respondendum est, illam esse *tantam, quanta requiritur, vt moles sanguinis e corde proiecti locum sufficientem nanciscatur* (Cap. I. §. 17.). Quodsi igitur arteriae omnes simul pulsant eodem temporis momento, quo, vi cordis, iste sanguis proiicitur: necessario nulla arteria est, quae non aliquantam illius massae portionem intra cauitatem suam tum temporis dilatatam recipiat. Sanguis igitur proiectus, ceteris paribus, per totum systema arteriosum aequaliter distribuetur. Quodsi igitur data fuerit quantitas proiecti sanguinis, massaque sanguinis arteriosi, et arteriarum capacitas: quantitas quoque dilatationis, siue differentia diametrorum non difficilis erit determinatu.

§. 59. Liceat autem loco infinitarum diuiſionum aortae aſſumere vnum canalem arterioſum, eiusdem vbique capacitatis, et tantae longitudinis, quanta requiritur, a tota maſſa ſanguinis arterioſi; quod ad calculum facilitandum nemo non concedet. Porro aeſtimabimus maſſam ſanguinis arterioſi, quando arteriae in ſtatu dilatato eſſe concipiuntur, ad minimum quinque librarum, ſiue $= 60$ vnciam; vncia autem ſanguinis occupat ſpatium $1\frac{1}{2}$ digitorum. Sunt igitur vnciae ſanguinis $60 = 90$ digit. $= 90000$ lin. Diameter aortae dilatatae iuxta plerasque obſeruationes eſt $= 10$ lin. erit igitur ſectio eius $= \frac{314}{4}$ lin. et conſequenter longitudo canalis arterioſi, qui quinque libras ſanguinis continet $= 1146\frac{1}{3}\frac{56}{14}$ lin. $= 11$ ped. 4 dig. $6\frac{1}{3}\frac{56}{14}$ lin. quae longitudo, ſiue arteria dilatetur, ſiue contrahatur, conſtans eſt, vt cuiuis attendenti facile patet. Quodſi iam concedere velim, quod maſſa ſanguinis proiecti aequalis ſit duabus vnciis (§. 56.): erit maſſa ſanguinis arterioſi, tempore contractionis $= 60$ vnc. $- 2 = 58$ vnc. $= 87000$ lin. et differentia diametrorum $= 10 - \sqrt{96\frac{4}{9}}$ lin. $= 10 - 9\frac{4}{5}$ lin. quam proxime; ſi vero maſſam ſanguinis proiecti vnciae aequalem ponas, quod magis veroſimile eſt, erit differentia diametrorum $= 10 - \sqrt{98\frac{1}{3}} = 10 - 9\frac{24}{25}$. lin. Sin denique vna ſyſtole dimidiam vnciam proiici ſtatuas, quod omnium maxime probabile eſt: differentia diametrorum vix erit aſſignabilis.

§. 60. Quis autem eſt, qui non primo quoque obtutu videat, hanc differentiam, quae in primo caſu vix $\frac{1}{5}$ lineae, in altero circiter $2\frac{1}{5}$ lineae, in tertio vero propemodum nihilo aequalis eſt, adeo paruam eſſe, vt plane non reſpondeat ideae,

ideae, quam communiter de pulsu et dilatatione arteriarum concipimus. Si enim consideramus vehementiam pulsus in arteriis carpi, et temporum, quae propemodum minimae sunt illarum, quas tactu explorare solemus; harum ipsarum dilatatio maior omnino esse videtur. Quodsi autem vasa minora istum terminum transgrediuntur, quanto magis vasa maiora ampliabuntur. Non igitur erramus, si differentiam diametrorum canalis arterioſi contracti et dilatati vni lineae aequalem ponamus. Quapropter sit diameter minima canalis arterioſi $= 9$ lin. erit sectio eius $= \frac{25434}{400}$ lin. quae ducta in longitudinem supra indicatam $= 1146\frac{156}{314}$ lin. dabit massam sanguineam in arteria contracta contentam $= 72900$ lin. $= 72\frac{9}{10}$ dig. differentia igitur massarum erit $= 17100$ lin. $= 17\frac{1}{10}$ dig. $= 11\frac{2}{5}$ vnc. sanguinis, quae aequalis est portioni sanguineae, quae vna systole in aortam proiici debebat. Iam vero magis vero simile est, in tractu arteriarum multo plus sanguinis continèri, quam quinque libras et fortasse non erraueris, si illam massam decem libris aequalem statuere velis; in quo casu, si diameter aortae sit $= 10$ lin. erit longitudo canalis arterioſi $= 22$ ped. 9 dig. $2\frac{312}{314}$ lin. Sit autem diameter minor $= 9$ lin. tum sectio arteriae $= \frac{25434}{400}$ ducta in hanc longitudinem dabit volumen seu massam minorem sanguinis $= 145800$ lin. quae quantitas a decem libris seu 120 vnciis $= 180$ dig. $= 180000$ lin. subducta, relinquet differentiam $= 34200$ lin $= 34\frac{1}{5}$ dig $= 22\frac{4}{5}$ vnc. sang. At vero cum impossibile sit, (siue iam quinque siue decem libras sanguinis in arteriarum tractu contineri assumseris,) vt vel maximum, quod homini dari potest, cor tantam quantitatem sanguinis, nimirum vncias vndecim aut viginti

duas capere, nedum in aortam traiicere queat, et praeterea a vera massa, quanta probabiliter (§. 56.) transfundi potest, vehementer differat: haec tria necessario inde sequuntur: *Aut* enim *pulsus et dilatatio arteriarum non fit in omnibus arteriis simul*; *aut idea pulsus*, *qualem hactenus vulgo concepimus*, *falsa est idea*; *aut hoc vtrumque locum habet.*

§. 61. *Pulsus*, definientibus ita praecipuis scriptoribus, *est perceptio impetus arteriae in digitum tangentem*; aestimamus huius impetus quantitatem ex robore et impressione, quam in partem tangentem fieri persentiscimus. Absit, vt negem phaenomenon; omni iure differentiam diametrorum arteriae contractae et dilatatae vni lineae aequalem supra (§ 60.) posuimus, ita enim reuera apparet: sed caussam phaenomeni vt admittam, vix mihi patior persuaderi. Videlicet, aut arteria tota pulsat, aut pars eius; vtroque modo potest obtineri effectus idem, phaenomenon idem. Demonstrauimus autem (§.60.), si pars arteriae pulsat, hoc est, si latera eius diducuntur, hanc apparentem diametri augmentationem impossibilitatem inuoluere. Non igitur solum latus arteriae esse potest, cuius impetum digitus tangens sustinet, sed in ipsa arteria tota quaeri effectus et phaenomeni ratio debet, id igitur, quod pulsare sentimus, non est nisi arteria tota, loco suo mota, et digito exploranti propius applicita. Quibus rite perpensis apprime sauet ipsa arteriarum figura, quae tortuosis flexionibus suis vbique mire se insinuant, et in quas irruptio sanguinis potissimum fieri debet. Quando igitur sanguis in arteriam intruditur, canalis ABCDE turgescit, et figuram aliam AβC,

Figura 13.

$A\beta C\delta E$ induit, si vero pulsum exploras in β, non putandum est, diametrum canalis ABC a B crevisse vsque in β; sed potius totum vas translatum est ex ABC in $A\beta C$, et ex CDE in $C\delta E$; et vicissim, quando vas iterum restituitur, ex $A\beta C\delta E$ in situm ABCDE denuo transfertur. Atque haec reciproca arteriae translocatio motum quendam vibratorium, et micationem producit; quae pro varia arteriarum positione ac vicinia efficit, vt vas vibrans hic in situ $A\beta C$, illic in situ ABC sentias, hic igitur productio, illic restitutio arteriae perceptionem pulsus tibi ingeneret.

§. 62. Hactenus (§. 58-61.) *simultaneum* omnium arteriarum *pulsum* supposuimus: videamus, quatenus haec hypothesis admitti possit. Arterias singulas simul dilatari qui autumant, ad experientiam prouocant, iudicem in hoc casu non tam fallacem, quam minus intelligibilem. Certe interualla pulsationum adeo breuia sunt, vt indubia experimenta capere res praeceps sit ac difficilis. Non igitur hoc argumentandi genus ita perfunctorie admittendum est, nisi certus sis, obseruatorem omni possibili cautela vsum fuisse; quamquam, si in animalibus viuis experimenta instituere velis, velocitas pulsus bestiae ligatae et anhelantis omnem fere diligentiam eludat, vt hac methodo parum proficere possimus. Iam quod ad me attinet, illa ipsa experientia in meo corpore capta conuictus in sententiam contrariam trahor; deprehendo enim ex. gr. pulsum arteriae iugularis non esse simultaneum cum pulsu arteriae carpi. Quia autem ex nostra descriptione pulsationis (§. 61.) accidere potest, illam tunc quoque sentiri posse, quando arteria

in

in priſtinam ſuam figuram reſtituitur: ſequitur ex hac differentia temporis nihil certi poſſe concludi. Qui vero tempus ſyſtoles cordis et pulſus arteriarum inter ſe conferre ſatagunt, ſimiliter rem ſumme arduam adgrediuntur, quia arterias in puncto pulſare, cor autem motum protractiorem exercere perſentiſces, nec quodnam punctum ſyſtoles puncto pulſationis reſpondeat, facile determinaueris. Certum eſt quidem, momentum illud temporis, quo apex cordis latera pectoris ferit, non coincidere cum appulſu arteriae carpi aut carotidis: ſed eo ipſo, quia ſyſtole cordis non fit in inſtanti, nec ergo ſciamus, an illud momentum ſit principium, an medium, an finis ſyſtoles; inde inferre non licet, ſyſtolem cordis et pulſum arteriarum non eſſe ſimultaneum; quemadmodum viciſſim ex ſimultaneitate ſyſtoles et pulſus ex. gr. arteriae carpi non ſequitur, quod cor ſanguinem vsque ad arteriam illam eodem momento in motum cieat, quia alia quaedam cauſſa huius ſimultaneitatis, ipſa videlicet variata pulſationis perceptio, ſubeſſe poteſt. Interea, quia tempora interuallorum, queis tam pulſationes inter ſe, quam ſyſtole et pulſationes differunt, non adeo inſignia ſunt, vt alternatiua et vtrinque aequali menſura ſe inuicem ſubſequantur; quia etiam arteriarum ſociarum, ex. gr. carotidum, in carpo, temporibus, pede, pulſatio exacte correſpondent, quod fieri non poſſet, niſi ab vna eademque potentia communi vrgerentur; quia porro accelerato aut retardato motu cordis pulſationes arteriarum coincidentes eodem momento ſimiliter accelerantur aut retardantur, quod ſimiliter non fieri poſſet, niſi ſanguis in arteriis immediate a corde impelleretur: *veroſimile eſt* omnino, *pulſum*, *etſi non eodem tempo-*

temporis momento, tamen eodem vnius ſyſtoles ſynchroniſmo per omnem arteriarum tractum continuari. Denique ſanguis grauitatione ſua in latera vaſorum premit, et extenſionem illorum adiuuat (§. 15.): augetur haec preſſio, aucta mole, et quidem in inſtanti; in ſyſtole autem ſanguinis arterioſi moles augetur: tempore igitur ſyſtoles latera arteriarum per ſanguinem auctum et grauitate ſua prementem ad maiorem extenſionem ac dilatationem ſollicitantur, et quidem in inſtanti ac ſecundum omnem tractum arteriarum, quousque ſanguis grauitans pertingit. Noſtra igitur ſententia, quod *arteriarum pulſus cum ſyſtole cordis* coincidat, ex his rationibus probabilior euadit ac corroboratur.

§. 63. Demonſtraui alio loco, dari in tubis capillaribus reſiſtentiam aliquam, non a vi attractiua aut fluido contraponderante, ſed ab illorum anguſtia deriuandam, quae humana induſtria adeo augeri poſſit, vt ad inſignem altitudinem ſuperincumbens fluidum in quiete ſeruetur. Vaſa autem capillaria in corpore animali omni imaginatione ſubtiliora atque anguſtiora ſunt: ergo illorum reſiſtentia ſimiliter ſe habet. Preſſio autem eſt in ratio baſeos et altitudinis fluidi; ſi igitur ſectio arteriolae capillaris minima eſt, quae pro baſi haberi debet; tum reſiſtentia erit maxima, et infinitae altitudinis columna ſuperincumbens immota haeret.

§. 64. Conſidera igitur: dilatationem tuborum arterioſorum incipere in principio aortae (§. 35.); et continuari per omnem tractum arteriarum (§. 62.); per illam vero nihil intendi a natura, niſi vt locus concedatur eie-

cto ex corde ſanguini (§. 55. 56. 58.); hunc ſanguinem per omnes arteriarum anfractus aequaliter et commode diſtribui (§. 58.); conſidera praeterea, eam eſſe inter aortam et arteriae ramos maiores et inter extremitates vltimas capillares proportionem, vt hae minimam portionem illius maſſae diſtribuendae ſortiantur, huius igitur portiunculae vim eſſe minimam, reſiſtentiam contra anguſtiarum capillarium eſſe maximam (§. 63.); An non magis magisque veroſimile videtur, has extremitates capillares quaſi pro clauſis haberi poſſe, et motui ſanguinis terminum in illis figi, donec haec reſiſtentia a viribus maioribus aliunde accedentibus ſit ſuperata? *nullum* igitur *ſanguinem tempore ſyſtoles cordis in venas transfundi* (§. 41.) *vi cordis*?

§. 65. Arteria dilatata, plena, elaſtica in reſtitutionem ſui nititur: ſublata igitur vi extendente contractio actu ſequitur; quia igitur hoc modo capacitas vaſis minuitur, vt tantum ſanguinis denuo expellatur quantum a corde ſuſceptum fuit (Cap. I. §. 23.): non dubium eſt, quin haec ipſa vis ſe contrahendi pro principio haberi debeat, vnde hic traiectus deriuandus ſit; de cuius actionis natura et quantitate paucis nunc nobis erit diſpiciendum.

§. 66. Quia contractio arteriarum effectus eſt elaſticitatis illarum: tota etiam haec actio iisdem legibus ſubiecta eſt, quas natura elaſticitatis requirit, quasque ſupra, cum de vi cordis ageremus (§. 28-34.), commemorauimus. Et quidem generaliter elaſticitas arteriarum dependet a robore ac firmitate fibrarum, ex quibus illae componuntur. Quo robuſtiores igitur fibrae, eo maioris elaſticitatis ſunt capaces: quo debiliores fibrae, ad eo minorem

norem gradum ſe patiuntur extendi. Neque minus arteria robuſta maiorem virium extendentium impetum ſuſtinet; arteria debilis minorem. Porro intenſitas ipſa virium elaſticarum arteriae, queis in ſui reſtitutionem nititur, ſequitur intenſitatem virium, queis ipſa fuit extenſa ſeu producta. Atqui haec extenſio prouenit ab augmento ſanguinis certa velocitate irruentis, augmentum et celeritas ſanguinis a vi cordis illum intrudente. *Vis* igitur *arteriae*, qua ſe contrahit, *eſt in ratione compoſita numeri fibrarum conſpirantium*, *quantitate elateris*, *et intenſitate eius*; ac reſpondet vi cordis, quatenus haec per excitatum ſanguinis irruentis impetum effecit arteriae extenſionem. Quo intenſior igitur actio cordis, quo maior dilatatio arteriae: eo fortior quoque eſt illarum contractio; e contra, quo languidior actio cordis eſt, eo minor dilatatio, eo debilior quoque contractio arteriae erit. Haec et plura ſimilia theoremata absque vlteriori argumentatione ex natura elaſticitatis fluunt, atque experientia confirmantur; ſiquidem plura adhuc corollaria inde deduci poſſent, quae ad illuſtrandas veritates phyſiologicas ac pathologicas facerent, ni nimium a propoſito noſtro deflecteremur. Haec igitur generaliter dicta ſatis ſunto.

§. 67. Quodſi iam magis praeciſe in quantitatem virium, queis arteriae in ſanguinem expellendum agunt, inquirere velimus, tanta ſollicitudine opus non eſſe putauerim, quanta vires cordis indagare oportuit. Quia enim intenſitas actionis illarum dependet ab actione cordis (§. 66.): quantitas virium, queis arteriae ſe contrahunt, facile determinari a priori poteſt, ſi cognita fuerit quantitas vi-

rium cordis, quae in arteriis dilatandis impenduntur ac conſumuntur. Ex effectu autem, ſi illa concludi debet, dicendum eſt in genere: vim arteriarum ſeſe contrahentium tantam eſſe, vt portio ſanguinis per ſyſtolem cordis in ipſas intruſa denuo terminis ſuis eiiciatur, antequam ſyſtole ſequente noua nouus quoque ſanguis irrumpat. Ad quod problema ſtrictius ſoluendum oportet noſſe, 1.) quanta ſit maſſa mouenda? quae pro capacitate arteriarum, et pro hypotheſi pulſus varia eſſe poteſt. 2.) Qua celeritate motus fiat? quae quidem, quamuis itidem varia eſt pro ratione interuallorum temporis inter duas pulſationes, in hoc tamen conſtans eſt, vt ſemper dimidium interualli tempus receptione ſanguinis, alterum dimidium expulſione illius conſumi licite ſupponamus. Via autem, quam maſſa mota emetitur, partim a modo, quo contractio arteriae atque ſanguinis eiectio fit, partim a quantitate ſanguinis actu expellendi (§. 56.), partim ab orificiorum, per quae exit, conſtitutione deriuari debet.

§. 68. Haud difficile foret, ad melius intelligendum ea, quae paragrapho antecedente diximus, omnia ea, quae de ſimilitudine ſiphonis (§. 22. 23.) commentati ſumus, ad actionem arteriarum applicare. Sed alia ſuccurrit methodus, quae expiſcandae menſurae virium tam cordis quam arteriarum apprime fauet, et quae in omni caſu adhiberi poteſt, ſiue arterias ſimul omnes, ſiue ſucceſſiue (§. 62) agere ſuppoſueris. Videlicet loco vaſis arterioſi, elaſtici, dilatabilis finge vas rigidum, et in locum fluidi, ſoliditatis ſpeciem intra canalem induentis impenetrabilis, ſuppone fluidum elaſticum. Sit vas plenum clau-

clauſumque firmiter vndequaque. Quodſi iam plus fluidi addideris, maſſa prior in volumen minus comprimetur, vt noua portio locum neceſſarium nanciſcatur; et ambae ſimul ſumtae volumen priſtinum conſtituent. Facta compreſſione elater fluidi augetur in ratione maſſarum. Auferatur vis comprimens, ſiue ceſſet quomodocunque illius actio, vas autem clauſum maneat eiusdem capacitatis, ne fluidi compreſſi volumen quicquam mutetur: tum fluidum ſuas vires conceptas habebit et elateris ſollicitationes ad motum. Aperiatur iam vas ex aliquo latere; tum viribus iſtis mortuis ſuccedent viuae, quae motum fluidi actu producent; fluidum igitur profiliet pro quantitate virium pellentium; ſunt autem hae in ratione elateris aucti, et hoc augmentum in ratione vis comprimentis. Fluidum igitur mouebitur pro quantitate virium, queis compreſſum fuerat.

§. 69. Videmus, re hac methodo conſiderata eundem effectum obtineri, ac ſi vas elaſticum, fluidum vero rigidum fuerit. Fluidum elaſticum colligitur in ſpatium minus, quantum videlicet requirit fluidum denuo accedens, et plus maſſae quidem adeſt, ſed ſub eodem volumine; Hoc vero idem eſt, ac ſi fluidum non elaſticum volumine auctum reciperetur in vas elaſticum, dilatatum et ampliatum. Neque minus: quodſi fluidum elaſticum compreſſum iterum ſe expandit, et vi ſua locum ſibi extra vas per datam portam quaerit; non illud totum effluit, ſed tantum, quantum denuo acceſſerat; et ſpatium, quod prius occupauerat, adhuc adimpletum permanebit; ſiue: continebitur maſſa prior fluidi ſub volumine priſtino. At vero idem fiet, ſi vas elaſticum ſe contrahit; expellendo

enim portionem, quantam receperat, capacitas ipſius ampliata ad priſtinos terminos deducitur, vt nil niſi maſſa priſtina ſpatio priſtino contineatur. Quodſi igitur ſub nomine vaſis intellexeris tractum totum arteriarum pulſantium, et ſub nomine fluidi ſanguinem arterioſum in omni illo tractu dilatato contentum: poſſibile erit determinare vim elaſticam arteriarum, et celeritatem ſanguinis in venas proiiciendi, quae omnino tanta erit et eſſe debet, vt reſiſtentiae ab extremitatibus capillaribus (§. 63.) obiectae, et ſi quae aliae occurrant, vinci poſſint.

Sectio 4.

De actione Auricularum.

§. 70. Auriculas in perpetuo motu reciproco eſſe cum ventriculis cordis, et hunc motum in dilatatione et contractione conſiſtere, obſeruationibus diſcitur certiſſime. Illas igitur ad potentias ſanguinis circuitum promouentes pertinere (§. 3.), nemo dubitat. De quantitate actionis huius nemo, de modo autem pauci, et ii quidem non niſi generaliter ſtructuram eius muſcularem allegando, quicquam commemorauere. Omnes in eo verſantur, et mire ſe dilacerant, vt rationem reddant, quare auricula dextra capacior ſit ſiniſtra? quam quisque proferre et ſtabilire conatur ſyſtemati ſuo conuenienter.

§. 71. Noſtrum eſt, non fingere hypotheſes, ſed ex indubitatis phaenomenis et veritatibus ea, quae ſequuntur, explicare, quae non ſequuntur, relinquere. Ad ſcopum igitur noſtrum obtinendum poſtulamus concedi ſequentia:

1.) Pa-

1.) Patere viam ſanguini ex vtraque caua tam in auriculam dextram quam ventriculum eiusdem lateris; et patere viam ex vena pulmonali in auriculam et ventriculum lateris ſiniſtri.

2.) Sanguinis motum in vena caua inferiore eſſe lentiſſimum.

3.) Sanguinem in vena caua ſuperiore indeſinenter deſcenſum et lapſum aut in auriculam aut in ventriculum, qua via patet, affectare.

4.) Sanguinis deſcendentis motum eſſe quidem acceleratum, ſed tamen ob breuitatem temporis pro aequabili habendum eſſe; hinc nullam vim ei ineſſe, niſi preſſionem a grauitate ortam.

5.) Sanguinem in venae pulmonalis ramis illis, qui ex ſuperioribus pulmonum partibus verſus cor deſcendunt, ſimilem continuam preſſionem et motum exercere vi grauitatis ſuae.

6.) Pulmonem in perpetua actione et voluminis ſui variatione eſſe.

7.) Sanguinem ex vena pulmonali in auriculam ſiniſtram et ventriculum non ſola preſſione a grauitate ſua orta, illabi: ſed impetu concepto ex actione pulmonum, vi viua irruere.

8.) Sanguinis motum nullam pati moram, actionem igitur potentiarum non debere officio ſuo deeſſe, ſed indefeſſam continuari temporibus et rhythmis determinatis.

9.) In ventriculis et auriculis poſt ſyſtolem ſuam vacuum exiſtere reſpectu totius capacitatis ſuae.

10.) La-

10.) Latera ventriculorum in diaſtole non niſi ad certum gradum relaxari, et hinc vi quadam extranea vlterius extendi debere, vt apta fiant ad nouam ſyſtolen.

Omnes hae propoſitiones partim ex iis, qua in Capite primo, et in hoc ſecundo iam ſtabilivi, partim ex adſcititiis principiis anatomicis ita facile poſſunt demonſtrari, vt earum ampliori deductione ſuperſedeam. Properemus igitur ad concluſiones.

§. 72. Quando Cor in ſyſtole eſſe incipit; contractio auricularum finita eſt. Si igitur tum auricularum latera velles diducta, neceſſario vacuum haberes. Vbi autem vacuum eſt, ibi reſiſtentia eſt nulla. *Sanguis* igitur *ex vtraque Caua in auriculam dextram, et ex vena pulmonali in auriculam ſiniſtram celeritate qualicunque influit*, et illarum capacitates adimplet, ac *dilatat.*

§. 73. Auricula dilatata, elaſtica in ſui reſtitutionem nititur. Vis huius niſus eſt in ratione numeri fibrarum ad contractionem correſpondentium, quantitatis, et intenſitatis elateris ſui. Hac vi ſua ingenita, *exprimunt ſanguinem, finita actione cordis, in ventriculos reſpectiuos vacuos.* Quantitas maſſae determinatur a capacitate auricularum, non neglectis iis cautelis, quas in determinanda quantitate ſanguinis e corde prorumpentis (§. 56. 57.) itemque in Capite I. §. 27. 28. 29. allegauimus. Celeritas autem, qua in latera ventriculorum irruit, a celeritate, qua muſculi auricularum ſe contrahunt, et ab orificio, quo auricula in ventriculum hiat, dependet, et ex idea emboli, capacitatem tubi minuentis (§. 22. 23.) ſimili modo deduci poteſt.

§. 74.

§. 74. Laxata ventriculorum latera vi extranea dilatari debent (§. 75. n. 8. 10.). Quia autem motus in vena cava inferiore eſt lentiſſimus (n. 2.), et eius celeritas minima; neque minus, quia vis ſanguinis, deſcendentis (n. 4.) in ſola preſſione conſiſtit: *patet hinc neceſſitas auriculae dextrae, vt miſu ſuo ſe reſtituendi motum nouum imprimat ſanguini*, non ſolum ſuo, ſed et alteri ex vena cava vtraque (n. 1.) allabenti, quae vtraque maſſa iunctim ſumta, celeritate concepta, in laxata ventriculorum latera irruit, et illa ſubito, quantum neceſſe eſt (n. 10.), extendit. Neque minus *patet neceſſitas auriculae ſiniſtrae, vt* nimirum *latera ventriculi ſiniſtri* per ſanguinem velocitate concepta iniectum *ſubito extendantur*; quia circulatio ſanguinis moram non patitur.

§. 75. Quia ſanguinis motus in cauis eſt lentus (§. 75. n. 2. 4.): igitur *omnis* eius *acceleratio a ſola actione auriculae dextrae proficiſci debet.* Quia e contrario ſanguis ex pulmone in cor ſiniſtrum vi viua et cum celeritate (n. 7.) irruit: igitur omnis *vigoratio*, qua *ventriculo ſiniſtro* opus eſt, *non a ſola auricula ſiniſtra ingeneratur, ſed* illa *a quantitate* impetus ſanguinis *ex auricula et vena pulmonali* prorumpentis *aggregata* proficiſcitur. En veram cauſſam phyſicam et finalem, quare auricula dextra capacior et fortior ſit et eſſe debeat, quam ſiniſtra. Qui ad rationem huius inaequalitatis reddendam, denſitatem et (contradictorie plane) fluiditatem maiorem ſanguinis, quam in pulmone nanciſcitur, ſomniant, illi tenebris circumfuſi caligant, et oleum ac operam, quam inanem ludebant, perdidere.

Sectio 5.

De Attractione vaſorum capillarium.

§. 76. Saepe accidit, vt, qui in explicandis phaenomenis naturae occupati ſunt, tales cauſas in medium producant, quae non niſi ſpeciem quandam veri habent: cuius quidem erroris nulla alio ratio eſt, quam quod nec effectus nec cauſſae ideam diſtinctam habeant, ſed ſola ſpecioſa aliqua ſimilitudine partiali, quae tamen nihil ad rhombum facit, decipi ſe patiantur, vt miros paralogismos committendo et ſibi et aliis fucum vendant. Horum ex numero ſunt illi, qui poſtquam generaliter intellexerunt, aquam in tubulo capillari ſurſum aſcendere, hanc legem ad motum ſanguinis explicandum applicari poſſe autumantes, ſtatim concludunt: Ergo extremitates capillares venarum ſanguinem attrahunt; Ergo hac attractione ſanguis ex arteriis in venarum alueos facilitatur. Sed ſi diſtincte quaeſiuerimus ex natura, illa quoque diſtincte reſpondebit.

Figura 14. §. 77. Sit Tubus capillaris AB, qui ſuperficiem aquae, in vaſe V tangens, replebitur ſupra libellam vsque ad altitudinem BC; ſi remoueris tubum ab aqua; illa portio recepta et attracta in ſpatio BC immota haerebit.

Si profundius immerſeris tubum ad altitudinem BD, tum et aqua in tubo aſcendet vsque ad altitudinem F, ita vt ſit $BC = DF$, et $BD = FC$; (ſi nimirum anguſtia tubi vbique ſibi aequalis eſt, quod ad facilius intelligendum experimentum ſupponimus). Si extraxeris tubum, aqua iterum deſcendet, donec ad priſtinam altitudinem BC peruenerit.

Si

Si tubum AB inuertas, vt extremitas B ſurſum ſpectet: aqua in cauitate CB haerens deſcendit ex BC vsque in EA, et reliquum ſpatium BE = AC aqua vacuum relinquit.

Sit Tubus AB maioris diametri AS, qui definat in tubulum capillarem BC, cuius attractio tanta ſit, vt, ſi ſuperficiem aquae tangat, fluidum in illo aſcendat et haereat ad altitudinem DC. Si repleueris totum hunc tubum AC fluido, tum illud deſcendet, et effluet per foraminulum C, tam diu, donec ſuperficies fluidi ſuperior AS peruenerit vsque ad terminum D; et ex tota maſſa fluidi nihil remanebit reſiduum, niſi quantum anguſta tubi capillaris capacitas CD virtute attractionis capere et retinere poteſt. Figura 15.

Procedit hoc experimentum, ſiue Tubi AC repleti extremitas C ſuperficiem aquae tangat, ſiue totus tubus liber ſit circumquaque.

Idem erit phaenomenon, ſi tubus capillaris BC cum tubo maiori AC non in directum iaceat, ſed illi ad angulum quemcunque ita inclinentur, vt capillaris FC in ſitu infra horizontem HO depreſſo, maior autem AB in ſitu ſupra horizontem eleuato conſeruetur. Figura 16.

§. 78. Ex his experimentis (§. 71.) ſequitur: 1.) *vim attracticem non agere niſi ad certum aliquem terminum, quem numquam transgrediatur*; 2.) hanc *vim non eſſe tantam, vt ſuperincumbentem aliam maſſam ſuſpenſam tenere poſſit*, ſed potius ſuperatam illius maſſae ſuperincumbentis pondere, *deſcenſum cedere illi*, donec retinendae portioni ſuae determinatae reſiduae denuo par ſit. 3.)

Tantum igitur abeſſe, vt tubus capillaris vltra debitam altitudinem repletus, et altero orificio immiſſus fluido cuidam, plus vltra recipiat, vt potius, quae ſuperflua ſunt et oneroſa, demittat.

§. 79. *An igitur extremitates capillares venarum ſanguinem iugunt, et motum eius facilitant? id quidem*, ex demonſtratis (§. 71. 72.) puto *nemo intelligens conceſſerit.* Attrahant illae quidem per me ſanguinem, ſi vacuae fuerint, attrahant ad ingentem altitudinem, quousque propter anguſtiam vaſorum licebit. Quia venae naturaliter plenae ſunt, et iam vltra terminum altitudinis fixum repletae: iſta vis attractiua adeo non plus attrahet, aut ſuſtinebit ſanguinem venoſum, vt potius deſcenſum concederet, quam aſcenſum iuuaret, ſi nulla alia vis in corpore adeſſet, quae huic deſcenſui valide reſiſteret. Qui igitur phaenomena iſta de applicatione emplaſtrorum, cataplasmatum, vnguentorum, quorum partes aquoſas, oleoſas, ſpirituoſas, a ſuperficie corporis abſorberi experimur, explicare aggrediuntur, ad principia longe alia, ex hydraulicis eruenda confugere debent; quia in attractione tubulorum capillarium parum ſolatii inuenient.

OBSER-

OBSERVATIONES ANATOMICAE AD HISTORIAM ET ACTIONEM MVSCVLORVM FRONTALIVM, OCCIPITALIVM, PALPEBRARVM, FACIEI *pertinentes.*

AVTORE
Ioſia Weitbrecht.

MVſculi *frontales*, *ſuperciliorum* et *palpebrarum* ita inter ſe nectuntur, vt de vno nihil exacte referri queat, quin et ſimul alterius mentio fiat. Sed nec de *frontalibus* atque *occipitalibus* quicquam ſtabile dici poteſt, quin accurata incumbentium ac ſubſtratarum membranarum cognitio praemittatur: in quarum recenſione omnium accuratiſſime *Cel. Winslowius* ſe geſſit, vt pauca adiicienda ſuperſint; quae tamen prorſus negligenda non ſunt, quia determinatio ſitus, actionis ac nexus muſculorum dictorum inde dependet. Tabula XV.

II. Subter pinguedinem cuti caſuariae immediate accumbentem detegitur tunica aliqua ſingularis, quam vel cum *Veſalio* panniculum carnoſum, vel cum *Winslowio membranam pellicularem* dixeris, perinde eſt; quamuis poſteriorem denominationem cum idea rei ipſius magis conuenire fatear. Haec *membrana* in tota exteriore ſuperficie ſua plurimas fibras disiicit, quae ipſam maſſam pinguedinis penetrant, illam in cellulas diuidunt, et

ſubinde *arctiſſimam*, cum ea atque ipſa cute, *connexionem*, imprimis *in vertice* ſecundum longitudinem futurae, efficiunt. Obtegit illa porro omnem amplitudinem capitis in regione frontali, temporali, verticali atque occipitali; *nec* tamen *eandem* vbique *craſſitiem* ſeruat.

III. Membranam pellicularem (II.) ſubſequitur *Galea aponeurotica* ex *duabus laminis*, per tunicam cellularem diſtinctis conſtans, et ſimiliter toti caluariae ita obducta, vt etiam ad orbitae crepidinem vsque continuari, imo et lamellam aliquam ſuper ipſam palpebram ſuperiorem proiicere videatur. *Tenuior* eſt ſupra muſculum temporalem, ad cuius circumferentiam inſertionis circularem firmiter accreſcit; *tenuiſſima* autem ſub muſculis frontalibus, et circa inferiora temporum, vbi verſus os Zygomaticum demittitur.

IV. Integumentorum numerum complet *perioſtium*, ſimiliter ex *duplici* tunica contextum, quarum *exterior* laxa et mobilis muſculum temporalem externe obducit, *interior* vero cranio ipſi ſtrictiſſime inhaeret.

Figura 1. V. Muſculi *occipitales* paullo ſupra lineam acutam transuerſalem (lit. *a*.) e regione ſinus cruciformis oſſi occipitis adnaſci ſolent. Vtplurimum maſſa illorum carnea *quadrilatera* eſt, ita vt linea inſertionis vtriusque (lit. *b. c.*) non eandem directionem ſeruet, ſed quadantenus verſus ſe inclinentur (lit. *d.*). Oblique ſurſum progreſſi proiectiones ſuas *tendineas* laminae *exteriori* galeae aponeuroticae (III.) intexunt, vel potius, vbi crebriores ſunt, *ipſiſſimam* hanc *laminam* conſtituunt. Propter ſitum et progreſſum muſculorum obliquum fibrae iſtae tendineae vtrin-

vtrinque verſus mediam atque elatiorem muſculorum temporalium ſedem *diuergunt* (lit. *e*), tantum abeſt, vt, quod *Santorinus* perperam poſuit, circa verticem ſe decuſſent. Eidem huic laminae exteriori innaſcuntur aponeuroſes muſculorum *eleuatorum auris*, inter quarum texturam fibrae *occipitalium* denique deſinunt.

VI. Muſculi *frontales* cum Galea aponeurotica nihil commune habent, niſi ſolam *contiguitatem*, et forte fibroſitates quasdam cellulares interiectas. Immediate enim ſub cutis pinguedine ita intexuntur ipſiſſimae illi *membranae pelliculari* (II), vt vnam eandemque maſſam in regione frontali conſtituant; vnde ſequitur, illos galeae ſimpliciter *inſterni* non autem complicari. Porro *nullibi oſſi* alicui innaſcuntur; ſed, quemadmodum de membrana diximus, illam fibris disiectis cum pinguedine commiſceri: ita etiam hi muſculi frontales tota ſuperficie ſua externa ſecundum omnem latitudinem cum eadem pinguedine, et conſequenter cum *cute ipſa* committuntur. Fibrarum muſcularium extremitates *ſuperiores* ſenſim in membrana omnem carnoſitatem deponunt. *Inferiorum* autem aliquae, quae *circa mediam frontem* ſedem ſuam nactae ſunt, *profundius* diductae cum *pyramidalibus* narium coaleſcunt; *reliquae* circa *depreſſores* ſuperciliorum et *orbicularem* palpebrarum plane euaneſcunt; de qua connexione inferius (X.) plura afferemus.

VII. Relictis iis, quae de *inceſſu* et *quantitate* fibrarum in muſculis *frontalibus* vulgo diſputantur, et a *Morgagno*, *Santorino*, *Winslowio* ſatis diſcuſſa ſunt: eam tantummodo quaeſtionem examinabimus, quae ad *actionem* tam

tam *frontalium*, quam *occipitalium* pertinet: *an* nimirum *musculi digastrici sint? an* igitur *ad eandem actionem conspirent, et se adiuuant? an* vero *diuersimode agant?* Musculorum digastricorum, ex. gr illorum, qui ad maxillam inferiorem et os hyoides pertinent, et si quos alios, qui tendineas inscriptiones habent, huc referre velis, *ea* proprietas est, vt *duo ventres* carnei *per vnum* in medio interiectum *tendinem communem* connectantur, et quidem ita, vt tendo ille medius vtrinque in fibris carneis euanescat. At vero *talis* connexio inter musculum *frontalem* atque *occipitalem nullibi* conspicitur, quippe *duabus* distinctis (VI.) *tunicis* intexuntur; neque quisquam aponeurosim *occipitalis* in *frontalis* carnem modo indicato definere demonstrauit. Sed ne de solo nomine disputare videamur: concedamus esse *digastricos*; quia non negamus, aliqualem saltim inter illos connexionem intercedere, quippe *membrana pellicularis et* musculus *frontalis* galeae aponeuroticae, vt stratum super stratum, imponitur. At vero exinde non sequitur, illos in actionibus suis conspirare, quod tamen de aliis digastricis dici potest. Hoc eo clarius patebit, si in *singulorum* actiones separatim inquirimus. Musculi enim *frontales nulli adnascuntur ossi*. Ergo, quando fibrae illorum contrahuntur, ambo illorum extrema versus mediam partem appropinquant; ergo *cutis*, cui adnascuntur, in *elatiore* fronte *descendit*, circa *supercilia* autem *ascendit*, et in *media* fronte in angustius spatium coacernatur, id est, *corrugatur*. Atque haec actio non solum ex *situ*, et *connexione* musculorum *frontalium* (VI.) per *generales regulas*, quas de motu musculari in Commentar. Tom. IV. indicauimus, per legitimam consequentiam

tiam determinatur; ſed et *experientia* comprobatur: quippe in *corrugatione* frontis tam ſupercilia *tolli*, quam elatiorem cutis ſedem non capillatam *deorſum trahi*, oculis cernimus; imo ſi cutim illam manu ſurſum cogere tentaueris, in ipſo corrugationis actu illam manifeſto fortius deduci, et reſiſtentiam a digitis factam ſuperari experieris. Contra vero muſculi *occipitales* altero ſui extremo firmiter *oſſi innaſcuntur*, atque hoc modo punctum motus *fixum* nanciſcuntur: ergo, ſi agunt, aponeuroſes illorum tendineae neceſſario *verſus radicem* illam *fixam* appropinquant, et cutim, ſi quidem obſequitur, ſecum *verſus occiput* retrahunt. Tantum igitur abeſt, vt, ſi *frontales* et *occipitales ſimul* eodem temporis momento contrahuntur, in eadem actione *conſpirent*, vt potius ſibi mutuo *reſiſtant*, quia *illi* cutim *verſus frontem*, *hi* vero *verſus occiput*, directione plane *contraria* traherent. Non quidem negandum eſt, in frontis contractione, etiam in vertice et ſyncipitis elatiore ſede cutis ipſius diductionem ſentiri. Verum *primo non* de eo quaeritur, *an cutis trahatur*? ſed *an* haec tractio a muſculis *occipitalibus* proueniat, et *an hi* etiam ſimul cum *frontalibus* contrahuntur? quod certe tactu plane nequit explorari; neque etiam vnum ex altero conſequitur. *Deinde galea* iſta *aponeurotica* multo *ſtrictius* caluariae obducta eſt, quam vt tam vagas et *laxas* cutis *motitationes* producere aut *pati* poſſet. Denique illa ipſa *tractio* et motitatio cutis, *circa verticem*, *ſyncipiut* et *occiput*, nos conuincit, illos muſculos non *coadiutores*, ſed potius *antagoniſtas* eſſe; quia in *corrugatione* frontis omnem cutem in memoratis regionibus ſimiliter

verſus frontem trahi perſentiſcimus, quae motus *directio actioni* muſculorum *occipitalium* plane *contraria* eſt.

VIII. Qualis *effectus actionis* muſculorum *occipitalium* ſit, propius determinare non audeo. Quapropter, *quid ſuſpicer*, breuibus ediſſeram. Aut enim *cutim* in corrugatione frontis verſus anteriora tractam, *laxatis* muſculis *frontalibus retrorſum* ducunt, aut contractione ſua *aponeuroſin* et *galeam*, qua muſculi *temporales* obducuntur, firmiter *tendunt*; hos muſculos quadantenus *comprimunt*, atque ita illorum actioni *velificantur*; quemadmodum experimur, virtutem muſculi per *ligaturas* multum corroborari: aut fortaſſe *vterque vſus* locum habere poteſt.

IX. In Galea aponeurotica iuxta muſculum occipitalem plerumque tantum non horizontaliter verſus auriculam decurrit *lacertus* aliquis *muſculoſus*, teres et carnoſus, et in tunica concham externe inueſtiente terminatur. Nullus dubito, quin hic ſit *occipitalis minor Santorini*; interim vero nullatenus confundi debet cum aliis *auriculae* muſculis *poſticis* ſeu *retractoribus*, quippe qui non in galea, aut certe non in lamina eius exteriore, ſed multo *profundius* perioſtio ipſi (IV.) innaſcuntur, et quos ſaepiſſime in *tres* ſocios a natura diuiſos (propemodum, vt a *Veslingio* pinguntur) deprehendi; vt *nimis durum* mihi videatur, ſi *Cl. Winslowius* illis autoribus, qui *tres* muſculos et notarunt et delinearunt, ita nude et ſimpliciter imputare velit, quaſi illi diuiſiones iſtas *ſoli ſcalpello* ſuo deberent.

X. Vix

X. Vix vllus alius muſculus tam varias diuiſiones paſſus eſt atque Muſculus *Orbicularis palpebrarum*; quae omnes etiam eo minus inter ſe concordant, quia pro lubitu tantummodo aſſumtae nullo ſtabili fundamento nituntur. Sequar tamen in examine *ordinem Winslowii*. Huius quidem muſculi portio *prima* (lit. *a*.), ſeu fibrarum, quae quam longiſſime a palpebris diſtant, *ordo extimus* omnino circa canthum externum in orbem fertur, et quemadmodum in *Santorino* et *Walthero* delineatus eſt, ſuper os malae, eadem fere latitudine *reflectitur*, atque vsque ad *ligamentum ciliare* (lit. *e*.) dictum, *coarctatis* fibris aſcendit. Hic ordo in media malae regione per *acceſſorium lacertum* nigricantem (quem *inferiorem* dixero (lit. *b*.),) corroboratur, cuius *pars* cum pyramidali narium (lit. *k*) commiſſa ligamentum ſuperſcandit et cum frontalibus (lit. *i*.) deſcendentibus confunditur, *pars* autem *ſub ligamento* abſconditur et in vicinia terminatur. Quod vero *inceſſum* et *connexionem* fibrarum huius ordinis in *elatiſſima orbitae ſede* attinet: meas quidem obſeruationes neque cum *Santorino* neque cum *Winslowio* conuenire intelligo. Non cum *Santorino*, qui *hunc ordinem in Tabula ſua lit.* C. ita pingit, quaſi *ſubter frontalem* ſubduceretur, atque ita deſcribit §. VI. quaſi tumentes *corrugatoris ſuperciliorum* lacertuli ex illo componerentur: non cum *Winslowio*: qui *hoc* eodem *ordine* muſculum *frontalem tegit*, ordinem autem *ſecundum* inter corrugatorem et frontalem locat; qui quidem *ſitus Santoriniano* plane *contrarius* eſt atque inuerſus. Videlicet, vbi *ordo primus* in dicto loco ad muſculi *frontalis* fibras peruenit, eius progreſſus quidem omnino *interrumpi*, neque ad angulum internum continuari videtur. Figura 2.

videtur. Sed eius loco alius ſingularis *lacertus acceſſorius* (quem *ſuperiorem* (lit. *c.*) vocabo) ex hoc angulo ortus *ad eandem* orbitae ſedem oblique ſurgit, et cum *ordine primo* facta manifeſta fibrarum *decuſſatione* (lit. *d.*) ita confunditur, vt alter verſus tempora, alter verſus frontem directione ſeruata *in cute obliterentur*. *Frontalis* autem in hoc occurſu ita immiſcetur atque euaneſcit, vt *nec ſupra*, *neque infra* orbicularem progredi dici queat. Neque minus *corrugator ſuperciliorum* ſubiacens adeo *ab ordine primo* et *lacerto* iſto *ſuperiore* diſtat, vt *per* interſperſam *pinguedinem* ſufficienter diſtinguantur.

XI. *Ordo tertius* (lit. *g.*), ſeu fibrarum illa ſeries, quae *palpebris* proprie incumbit, omnino ductu magis elliptico incedit, atque angulum *externum* flexura quadam acutiore ambit; in cantho autem *interno* communionem adeo manifeſtam inter ſe non habet, ſed per interiectum *ligamentum ciliare* diſtinguitur. Hic autem ordo, non in ſuperiore ſed, in inferiore palpebra et *latior* et *denſior* eſt; quippe in illa inter ordinem ſecundum et tertium notabile aliquod *interuallum* fibris carneis deſtitutum relinquitur.

XII. Huius ordinis *tertii* fibrae, quo magis ad palpebrarum limbum appropinquant, eo magis directe et *parallele* incedunt, eoque magis illarum connexio in angulo externo obliteratur; vnde *ordo quartus* (lit. *h*) emergit. Hae fibrae omnes, quamuis in genere craſſiores ſint, quam vulgo delineantur: *vnicus* tamen *lacertus* inſigni quadam *turgeſcentia* prae aliis conſpicuus eſt, qui cum ipſo tarſi margine extremo *parallele* excurrit, ciliorum radices tegit, et iuxta canales lacrymales verſus ligamentum ciliare produci-

ducitur. Atque iſte lacertulus mea quidem opinione Muſculum illum *ciliarem Riolani* conſtituit, qui ſemper adeſt, modo diſquiſitio ſubtili cultello inſtituatur: quicquid contradicant *Dom. de Marchettis*, *Blaſius*, *Diemerbroek*, *Santorinus*, qui hunc muſculum nuſpiam adeſſe, nec a quoquam facile demonſtratum iri contendunt.

XIII. Totus hic *apparatus muſculoſus* ad palpebram pertinens (XXI.XII.) circumquaque quidem tam cuti quam pinguedini adnaſcitur: ſed *in angulo interno* imprimis inſertionem *fixam* nactus eſt. Non autem, vt recte *Santorinus* monet, in vnum punctum omnes fibrae cohaerent; ſed in tota anguli vicinia diffunduntur. Imprimis *ordo primus* et *ſecundus* cum *lacertis* ſuis *adſcititiis* (ſuperiore et inferiore X.) partim in *ligamento ciliari* ipſo, quam late illud patet, partim *ſubter illud* in oſſe naſali, et ſacculi lacrumalis tunica implantantur. Ordinis *tertii* autem fibrae quaedam etiam *in margine orbitae* obliterari videntur. *Ligamentum* autem iſtud (lit. *e.*), vulgo *ciliare* dictum, et a *Santorino* ac *Walthero* per aſteriscum indicatum, plane non *tendo communis* eſt, in quem omnes iſtae fibrae vniuntur, *neque* etiam pro *productione* aut colligatione *cartilaginum* tarſi, et palpebrarum haberi debet; ſed re ipſa nil niſi *verum ligamentum cutaneum* eſt, ſiue *productio* alba, et *tenax*, qua *cutis* ipſa *oſſi* naſali firmiter adnaſcitur. Atque hoc prudenti naturae conſilio factum eſſe arbitror, vt hac ratione, *fixa cute*, omnis ille *apparatus* in illud inſertus etiam ſimul *figeretur*, atque in motu ſuo determinaretur. Inde enim accidit, vt, quando *orbicularis* ſeſe contrahit, orbem Figura 2.

anguſtiorem efficiat, et ipſa cutis, qua orbita et palpebrae tectae ſunt, *verſus* angulum *internum* maxime trahatur; imprimis vero, quando oculum *claudimus*, *lacertus adſcititius inferior*, cutem *malae*, lacertus autem *ſuperior* cutem *ſuperciliorum* verſus hunc inſertionis locum ducit et corrugat.

Figura 2. XIV. Muſculus *Zygomaticus minor Santorini* (lit. *n.*), ſi non perpetuo adeſt et perfectus: ſemper tamen *aliqua* eius *veſtigia* deprehenduntur; id quod nemini mirum videbitur, ſi infinitae facierum varietates conſiderantur. Interdum inueni et *maiorem* et *minorem* ex eadem ſede, tamquam radios *ex centro* oriri: alio tempore loco minoris ex medio Zygomatico maiore vidi *faſciculum* inſignem oblique ſurſum ferri, verſus inciſorium, illique innaſci. *Zygomaticum maiorem* ſi quidem denominatio aliqua a functione aſſignanda eſt, neque Eleuatorem labiorum, neque Abductorem ſolum, ſed *Diductorem* rimae oris, vel cum *Heiſtero riſorium* nominare mallem; quia reuera *actio* eius eſt, *rimam* et angulum oris *diducere*, atque *oblique ſurſum tollere*, quem motum *inter ridendum* fieri obſeruamus.

XV. Muſculum aliquando inueni, *riſorio Santorini*, vt ouum ouo ſimilem. Saepe autem fibrae tantum veſtigia eius mentientes adfuere, quarum origo ita comparata mihi videbatur, vt omnino pro *quadrati colli* ſobole haberi poſſent, quod et ipſum *Santorinum* quadantenus *ſuſpicatum* eſſe, non tamen plane affirmaſſe, ex eius Paragrapho XXXIV. apparet.

XVI. Me-

XVI. Meminit *Santorinus* Cap. I. §. 23. *Triangu-* Figura 3.
larem labiorum aliquando longioribus fibris, quae mento proximiores sunt, *vlterius* prolatis *in aduersum* latus ferri, et compari suo ita occurrere, vt *vna* habeatur *eademque* fibrarum *continuatio* ab vno ad alium oris angulum, nullo interiecto diuisionis signo. Apparent huius combinationis vestigia etiam in Tabulis Eustachianis XXXI. et XXXVI. Ego illam tantum non semper deprehendi, quotiescunque circa has partes studiosius inquisiui. Iacet nimirum immediate sub cute *fasciculus muscularis* elegans, *planus*, ex vno maxillae latere versus aliud, proxime infra mentum *in orbem ductus* (lit. *g.*), qui non solum triangulares inter se committit, sed et imprimis *digastricos* in sua insertione *tegit* et cohibet. Tam *creberrima* huius musculi obseruatio, quam *situs* eius ab *Eustachiano* discrepans et *profundior* me determinarunt, vt illum delineari curarem, et cum Academia communicarem.

Expli-

Explicatio Figurarum.

TABVLA XV.

Fig. 1.

a. Linea horizontalis ſitum prominentiae acutae oſſis occipitis indicans.
b. Linea inſertionis Muſculi occipitalis dextri.
c. Linea inſertionis - - ſiniſtri.
d. Angulus inclinationis muſculorum.
e. Directio fibrarum muſcularium.

Fig. 2.

Exhibet Muſculum orbicularem palpebrae ſiniſtrae cum vicinia.

a. Muſculi orbicularis portio prima *Winslowii.*
b. Lacertus acceſſorius inferior.
c. Lacertus acceſſorius ſuperior.
d. Decuſſatio portionis primae, et lacerti acceſſorii ſuperioris.
e. Ligamentum cutaneum, ſeu ciliare *Santor.* ſeu, tendo ligamentoſus *Winslowii.*
f. Portio Orbicularis ſecunda *Winsl.*
g. Portio tertia.
h. Portio quarta, ſeu muſculus ciliaris *Riolani.*
i. Portio muſculi frontalis ad naſum deſcendentis.
k. Pyramidalis narium.
l. Muſculus inciſorius.
m. Muſculus Zygomaticus maior.
n. Muſculus Zygomaticus minor.
o. Fouea, vtplurimum pinguedine turgens.

Fig. 3.

a. Limbus maxillae inferioris.
b. Cutis reflexa.
c. Portio platysmatis myoïdis.
d. Digaſtricus dexter ad maxillam tendens.
e. Digaſtricus ſiniſter.
f. Mylohyoides ſubiacens.
g. Faſciculus muſcularis planus, infra mentum circulariter ſubductus, et commiſſuram muſculorum triangularium labii conſtituens.

CLAS-

CLASSIS TERTIA

CONTINENS

HISTORICA.

ELEMENTA CALMVCICA.

AVCTORE

T. S. Bayer.

SVperioribus in Commentariis litteraturam Mangiuricam explicatam dedi. Nunc de Calmucica quaedam adiicienda iudicaui, tantummodo vt illius ab Mangiurica diuerſitas cognoſcatur. Primum Calmucica quaedam in *Nicolai Witſenii* opere inueni. Deinde *Fridericus Groſſius*, collega noſter, quem honoris cauſſa nomino, a legato Principis populi Songar elementa litteraturae huius Moſcuae impetrauit et ad me Petropolin transmiſit. Ad extremum nactus ſum haec elementa *Groſſianis* ferme congruentia, ſcripta manu *Lobſang Iſchi*. Is quondam ſcriba apud Songarenſes fuit, inde captus a Ruſſis chriſtianae religioni ſeſe tradidit; ex quo nomen ei Baſilius Timothei filius, nunc eſt. Vltima littera *p*, omiſſa a Baſilio, a legato autem deſcripta, plane eſt Tangutana. Finales quoque adiectae ſunt in Schemate. Cetera ex collata litteratura Mangiurica facile ſuppleri poterunt. Nomen Baſilii ſubieci, hoc modo: *Kalmatski ime* (Calmucicum nomen) *Lobſang Iſchi*, *Oroſki* (Ruſsice) *kriſchtſchona* (baptizati) *ime* (nomen) *Faſili Timofeief* (Baſilius Timothei filius). Haec Ruſſica ſunt, ſcripta litteris Calmucicis.

DE VENEDIS, ET ERIDANO FLVVIO.

AVCTORE
T. S. Bayer.

QVoniam ex Herodoto Eridanum et Venedos his locis ad Balticum mare posui, eius rei rationem vt reddamus, tempus est. His autem verbis eius, vt ita faceremus, commoti sumus (a): ὅτε γὰρ ἐγωγε ἐνδέκομαι Ἠριδανὸν καλέεσθαι πρὸς βαρβάρων πόλιον, ἐκδιδόντα ἐς θάλασσαν τὴν πρὸς βορέην ἄνεμον, ἀπὸ τεῦ τὸ ἤλεκτρον φοιτᾶν λόγος ἐστὶ, ὅτε νῆσους οἶδα κασσιτερίδας ἐούσας, ἐκ τ ὁ κασσίτερος ἡμῖν φοιτᾶ. Τῦτο μὲν γὰρ Ἠριδανὸς αὐτὸ καλημορέη τὸ ὄνομα, ὡς ἐστὶ Ἑλληνικὸν καὶ ὅτι βαρβαρικὸν, ὑπὸ ποιητῶν δέ τινος ποιηθέν. ὅτε δὲ ὑδενὸς αὐτόπτεω γενομένυ, ὃ ὑναμαι ακῦσαι τῦτο μελετῶν ὅκως θάλασσά ἐστι τὰ ἐπέκεινα Ἐυρώπης. ἐξ ἐχάτης δ' ὧν ὁ κασσίτερος ἡμῖν φοιτᾶ καὶ τὸ ἤλεκτρον *Neque enim*, inquit, *mihi persuasum est*; *Eridanum vocari apud barbaros fluuium, qui se praecipitet in septemtrionale mare, vnde succinum perferri dicunt: neque insulas noui Cassiteridas, vnde stannum ad nos perferri praedicant: nam quod Eridanum attinet, ipsum illud nomen opinionem famamque rei euertit, Graecum enim est, non barbaricum, a poetarum aliquo confictum. Neminem*

(a) Lib. III. Cap. 115.

minem sane cognoui, qui eas viderit terras, neque, cum id maxime agerem intelligere potui, quem in modum mare ad vlteriorem Europam se habeat. Id vtique conflat, ab extrema Europa et stannum et succina ad nos perferri. Duo acceperat Herodotus, primum (succina et stannum ab extrema Europa et oceano septemtrionali perferri, quod vel ipso iudice, sine contrauersia erat, mercatoribus Ionicis et Ponticis,) Adriaticis et Atticis referentibus: alterum, fluuium a quo succinum perferatur Eridanum et insulas vnde stannum Cassiteridas appellari; quod Herodotus veretur ne ex vano hausum sit et a poetis confictum. Causa ea est, quod Ἠριδανὸς ἢ Κασσιτερίδες νῆσοι nihil barbari sonant; sed Graeci sermonis vocabula sunt. Nam Κασσιτερίδες παρὰ τὸ κασσίτερος, *a stanno*, Graece dicebatur: itaque etiam Ἠριδανὸν putabat eo genio esse, cum praesertim sonus oris Graii se quasi sorex proderet. Nec fallitur in primo. Nam Pontici mercatores, cum stannum ex insulis extremae Europae acciperent, nec nomen tamen regionis gentisque cognoscerent, ipsi finxerunt a stanno, vt eorum posteri ab situ ad occidentem Europae Hesperidas dixerunt. Sic Dionysius Afer

αὐλὰρ ἐπ' ἄκρην
Ἰερὴν, ἣν ἐνέπουσι κάρην ἠμὴν Εὐρωπάης
Ἰγήσας Θ' Ἑσπερίδας, τόθι κασσιτέροιο γενέθλη
Ἄφνειοὶ ναίουσιν ἀγαυῶν παῖδες Ἰβήρων.

at sub promontorio
Sacro, quod dicunt caput esse Europae,
Atque sub insulis Hesperidibus, (vbi stanni origo,)
Diuites habitant filii illustrium Iberorum.

Ex hoc loco certum est, eum insulas nullas quam Britanniam dicere, quamquam quae adhuc inscitia erat, Britannicas insulas ab his distinguit, et Rheno praetendit. De Eridani vocabulo autem dicam postea. Nam mihi nunc excitandus quasi est lector, vt quod verum rectumque in hac narratione est, illud stabilitum plane et confirmatum in animo gerat. Hoc dico, quod plane ab septemtrione et succinum et stannum aduectum sit in Graeciam, quodque vt stannum omnino ex insula Europae extremae subiecta, et illis testibus et natura ipsa suffragante, allatum fuisse oportuit, vt deinde succinum ab hoc mari Baltico, quod plerique septemtrionale dicebant, ita aequum non est, iis, qui haec omnia tam vera prodiderunt, in vno fidem derogare, quod a flumine perferri dicunt Eridano, qui se in oceanum illum septemtrionalem, seu Balticum mare praecipitet.

Hic fluuius, quoniam extra orbis noti vias situs erat, satis opportunus est visus Graecis ad fabulas, quae praesertim succini, gemmae pretiosissimae, memoriam complecterentur. Auctori Theogoniae Hesiodae res nondum matura fuit fictionibus: tantummodo de fluuio Eridano iam audierat. Eum enim cum aliis Scythicis et septemtrionalibus fluuiis recenset, quam Thitys Oceano pepererit (*b*). Idem ille Electras quidem duas, alteram Thaumantis et Oceani, alteram Iouis et Thetydos filiam commemorat, sed nihil illud adhuc ad succinum, cum tamen stannum nouit, quod etiam a septemtrione aduehebatur nihil item ille de Heliadibus. Possis itaque suspicari, iam Thaletis Milesii temporibus, cum illa theogonia est edita et stannum

(*b*) Lib. III. Cap. 115. v 338.

sum et succinum allata fuisse in Graeciam. Illius temporis aut paullo vetustior videtur fuisse auctor *Batrachomyamachias*, qui παρ' ὄχθας Ηριδανοῖο Physignatum ranam editam fuisse canit. At *Phaethon* Solis et *Clymenes* filius Homero ignotus fuit, *Hesiodus Phaethontem* canit, at illum *Cephali* et *Aurorae* filium. Nondum igitur ante *Thaletum Milesium* fabula illa de *Phaethonte* et *Electridibus* et succino exculta fuit. *Hygimus* quidem ait (*c*): *harum Heliadum lachrymae, vt Hesiodus indicat, in electrum sunt duratae.* Sed quis is est *Hesiodus*? qui hodie exstat, nihil de illis nouerat. Ne Onomacritus quidem in Argonauticis quidquam de Eridano et Phaethonte veluti notis fabulis. Primus, qui Eridani fabulas tangeret, *Aeschylus* fuit et secundum eum, vt *Plinius* annotauit (*d*) *Philoxenus*, *Nicander*, *Euripides*, *Satyrus*. Euripides in Hippolyto Stephanephoro nondum perfectam habet fabulam (*e*), vbi chorus:

Ἠλιβάτοις ὑπὸ κευθμῶσι γεννάιμαν
Ἵνα με πλεῦσαν ὄρνιν
Θεὸς ἐν πόλανάις ἀγέλησιν θήη,
Ἀρθέην δ' ἐπὶ πόντιον κῦμα
Τᾶς Αδριηνᾶς ἀκτᾶς
Ἠριδανῦ δ' ὕδωρ
Ἔνθα πορφυρὸν ϛαλάσσουσιν
Εἰς ἴδμα παλρὸς τριπόλαναι
Κόραι, Φαέθοντος ὄκλῳ, δακρύων
Τὰς ἠλεκτροφαεῖς αὐγάς.

Vtinam

(*c*) p. 224. ed. Munkeri. (*d*) Lib. XXXVII. Cap. 2. (*e*) v. 732.

Vtinam ſub altiſſimis receſſibus verſarer
Vbi me volucrem pennatam
In volucribus gregibus Deus eſſe iuberet,
Et tollerer ſuper maris fluctibus
Adriatico in littore
Eridanique in fluentis,
Vbi ſtillant purpuream
In aquam, patris ter miſerae
Puellae, Phaethontis miſeratione, lacrumarum
Electrum aemulantores ſplendores.

Filias Euripides dicit, quas ſorores fuiſſe poſt eum alii cecinerunt, veluti id aptius fabulae inſtruendae eſſet. Inter extremos *Apollonius Rhodius* excolendae fabulae artifex qui Eratoſthem condiſcipulo in Alexandrina bibliotheca ſucceſſit ſub Ptolemaeo Euergete. Aratus Solenſis et Eratoſthenes aequales fuere. Vter alterius exemplo Eridanum in cataſterismis poſuerit, non liquet. Vterque ſane habet (*). *Apollonius Rhodius* autem in Argonauticis (*f*) λέψανον Ἠριδανοῖο πολυκλαύϛου πολαμοῖο, fabulis iam ita adultis vt non modo Phaethontis ſororum, ſed etiam Apollinis ipſius lacrumas ſuccina eſſe dicerent, Electridas inſulas et Eridanum ad ſeptemtrionem collocat.

ἱερὴν ἠλεκτρίδα νῆσον
Ἀλλάων ὑπάτην, πολαμῷ πρεδὸν Ἠριδανῖο
ſacram Electride inſulam
Omnium extremam, iuxta Eridanum fluuium

Iſthic ait Argonautas penetraſſe vsque in Eridanum ἵνα τ' εἰσὶ πύλαι ϗ ἐδέθλια νυκλός, *vbi portae et cubilia noctis*

(* Anatus in phoenomenis v. 359 V. Nonnu in Dionyſ. l 23 v. 240. l. 38. 90. ſeq. v. 430. ſeq Dion. Aſer v. 290. ſeq. (*f*) Lib. IV. v. 507.

his sunt, hoc est sub vltimo borea. Attamen Eridanum cum Rhodano et Pudo misceri addit. Malo id ex scholiastae eius verbis intelligere te, quam ex Apollonii ipsius versibus: Ῥοδανὸς πολαμὸς Κελτικῆς τῷ Ἠριδανῷ συμμιγνύμενος ἢ χιζόμενος, τῇ μὲν εἰς ὠκεανὸν φέρεται, τῇ δὲ ἢ εἰς τὸν Ἰόνιον κόλπον, τῇ δὲ εἰς τὸ Σαρδόνιον πέλαγος. *Rhodanus fluuius Celticae Eridano mistus ac rursus in diuersa ita abit, vt partem in oceanum* (septemtrionalem) *partem in Ionium* seu *Adriaticum*, *partem in Sardonum* hoc est Ligusticum *exoneretur*. Isthic ad Eridanum ait Apollonius Phaethonta semiustulatum caelestibus flammis in lacus profundissimi ostium ab caelo cecidisse. Lacum teterrimum odorem spirare, circa eum autem lacum Heliadas in ἀιγείρους seu populos (vt Plinius et Hyginus in fabulis interpretantur) mutatas flere: lacrumas ab humo exceptas sole aestuante siccari cum lacus inundat terram, succina deuolui in Eridanum. Alii adhuc illud fabulae adiiciunt, Celtas narrare, Apollinem cum ad Hyperboreos accederet caelo, ob iurgia cum Ioue, relicto, quod Assilepius Apollinis e Coronide filius a Ioue esset fulmine ictus, aut, vt scholiasta Apollonii addit, cum Apollo ob Cyclopum caedem cogeretur coelo exulare isthic apud Hyperboreos, nec edisse, nec bibisse, sed sua fleuisse succina.

Iam velim mecum consideretis, quod verissimum sit in his fabulis, atque quibus ab caussis veris admista fuerint tum vana, tum obscura. Eridanum dico Dunam esse fluuium prope Rigam. Nam quae nunc Duna, ea olim Ῥῶδων *Rhodon*, ita vt abiecto principio, extremum vo-

cabuli ad hoc vsque tempus perſeuerauerit. *Marcianus Heracleota*: μετὰ δὲ τὰς ἐκβολὰς τῆ̃ Ὀυιςύλα πολαμῆ̃ ἐκδέχονται Χρόνυ πολαμῆ̃, ἐξῆ̃ς ἔισι Ῥυδῶνος πολαμῆ̃ ἐκβολαὶ. Ὁ δὲ Ῥύδων πολαμὸς ἐκ τῆ̃ Ἀλαύνυ ὄρυς φέρεται. *Viſtulae, Chroni, Rhudonis oſtia ſe deinceps excipiunt. Rhudon ex Alauno monte fertur Claudius Ptolemaeus*:

Τῆ̃ Ὀυιςύλα πολαμῆ̃ ἐκβολαὶ	μ̄ε	ν̄ς
Χρόνυ πολαμῆ̃ ἐκβολαὶ	ν̄	ν̄ς
Ῥύβωνος πολαμῆ̃ ἐκβολαὶ	ν̄γ	ν̄ζ
Τυρούντυ πολαμῆ̃ ἐκβολαὶ	νς L'	νη L'

Viſtulae oſtia - -	45.	56.
Chroni oſtia - -	50.	56.
Rhubonis oſtia -	53.	57.
Turunti oſtia - -	56. $\frac{1}{2}$	58. $\frac{1}{2}$

Rhubonem perperam dicit, vt ex Marciano intelligis. Quamquam autem ſecundum Ptolemaei rationes orientalior eſt Rhudon quam Duna, tamen ab eodem littus omne maris ſeptemtrionalis, vt illi dicebant, ſeu Baltici magis ad orientem ſummouetur. Nec adeo conſtare poterat Ptolemaeo longitudinis et latitudinis exacta ratio. Sed ſi Viſtulae ſitum cum Rhudonis oſtiis comparamus, mihi eſt manifeſtius, quam Dunam eſſe Rhudonem veteram. Scio quid hic *Olaus Rudbeckius* tumultuatus ſit, ſed huic mihi videor alibi ſatisfeciſſe (*g*), nec tanti eſt, vt hoc loco quidquam amplius dicam. Quod autem *Marcianus* dicit, Rhudonem ex Alauno monte fluere, id nos etiam confirmat. Nam a veteribus Boryſthenis quoque fontes po-

(*g*) De numo Rhodio p. 11.

ponuntur in Alaunicis montibus. Non quod aliqui iſthic montes ſunt, vnde Danapris fuit, ſed quod viri boni e montibus plerumque flumina oriri nouerant, eo, montes iſthic collocarunt, vbi Danapris fontes eſſe accipiebant. Iam nec Duna ex monte aliquo Alauno praecipitatur: attamen ex iisdem fere paludibus, ex quibus Boryſthenes. Hoc priſci homines acceperant. Hi vero barbarum vocabulum Rhudonis, in Eridanum mutarunt, vt aptius eſſet ori Graeco. Eridano conſtituto, iam cetera in vado ſumus. At, inquies, nullum ad Dunam ſuccinum eſt. Nempe priſci mortales tantum mercatus ſuccini ad Eridanum inſtitui acceperant, vt *Herodotus* ait: ἀπὸ τευ ἠλεκτρου Φαέθων λόγος ἐσί, *a quo Eridano ſuccinum perferri*, fama eſt. Hoc ſatis erat ad longam de Eridano fabulam cudendam veluti illic ſuccina legerentur. Haec autem ratio mercatus docet, ſuccina primum a populis ad Eridanum transmiſſa eſſe ad Scytas et ſecundo Boryſthene ad cataractas, hic excepta eſſe a Boryſthenitis Graecis, qui ſe Olbitas dicere malebant. Mea enim ſententia, vt nunc eſt, Olbitae vltra cataractas non nauigarunt. Nam primum ex *Conſtantino Porphyrogenneta* de adminiſtrando imperio ſatis apparet, quae cataractarum illarum natura et quam impenetrabiles illis temporibus atque ea ruditate nauigandi Graecis fuerint. Tum vero *Herodotus* teſtatur, ſolos quadraginta dies Boryſthenem nauigari potuiſſe. Quod ſi recte conſideres aduerſo flumine ſpatium fuit intra cataractas et tametſi aliter ſenſi olim, in eo me nunc ipſe reprehendo. Cetera quae in fabulis illis ſunt ad mercatum antiquiſſimum et naturam ſuccini, vt tunc explicari poterat, refero. Hoc inſigniter poſſet confir-

mari ſi exſtaret is ſcriptor, ex quo Euſtathuis ad *Dionyſium Afrum* v. 311. de Panticape, qui ſupra cataractas fluit, habet, ad eum fluuium ὑδυφανὴς ἠλεκτρος μήνης ἀρχομένης ἄυξεται, ὅτ᾽ ἀὐγή. De arboribus ſuccinifieris etiam *Sotacus* apud *Plinium* (*b*). *Sotacus credidit in Britannia arboribus effluere, quas electridas vocauit.* Male hoc *in Britannia.* Ceterum tametſi *Harduinus* ex Manuſc. legit: *petris effluere*, tamen potius crediderim Sotacum illum peruulgatae opinionis de arboribus, quam nouae ſententiae de petris auctorem fuiſſe. Orta eſt opinio ex coniectura. Videbant enim ſuccina reſinae ſimilia eſſe et incendi et fluere et olere reſinoſum. Inde nihil aliud in mentem veniebat, quam ab arboribus ſuccina ſtillare, vt in Pruſſia quoque multorum iudicium fuit. Phaethontem aliquando ſuſpicatus ſum Graecum fuiſſe ciuem e Ponticis coloniis, qui cum mercatus ſuccinarii cauſa ſeptemtrionem verſus profectus euerſa naue in aquis perierit: *Heliades* autem ſorores ſeu ſocios illius mercatus caſum illum doluiſſe. Sed forte verius etiam hoc totum ad naturae commentationem traducas, cum videretur ſol ὁ ἥλιος φάσθων aut radii ſolares, tamquam filius aliquis ſolis matura facere in arboribus ſuccina, idcirco erimi fabulae auctores non ſorores ſed filias *Phaethontis* prodidere *Heliadas.* Niccas apud *Plinium*, *ſolis radiorum ſuccum intelligi voluit: hos circa occaſum credit vehementius in terram actos, pinguem ſudorem in ea parte oceani relinquere, deinde aeſtibus in Germanorum littora eiici.*

Veriora aliquantum comperit *Pytheas Maſſilienſis Plinius* ſic ait: *Pytheas Guttonibus Germaniae genti auoli aeſtua-*

(*b*) Lib. XXXVII. Cap. 2.

aeſtuarium oceani Mentonomon nomine, ſpatio ſtadiorum ſex mitium: ab hoc dici nauigatione inſulam abeſſe Abalum: illuc vere fluctibus aduehi et eſſe concreti maris purgamentum: incolas pro ligno ad ignem vti eo, proximisque Teutonis vendere. Huic et Timaeus credidit, ſed inſulam Baltiam vocauit. Haec poſtea interpretabimur. Id enim propoſito noſtro ſatis eſt, quod intelligimus iam tum, hoc eſt, ante *Philippum Amyntae* Macedonem ſuccinarium a Tutonis exercitum fuiſſe. Is quoque *Plinius* auctor eſt, Romanos primum ſuccina accepiſſe a Venetis ad Adriam, ſed oſtendi, cum de numis Romanis in agro Pruſſico repertis dicerem, antea Tarentinos iam cognouiſſe. Haec ſunt illa tempora cum maxime ſuccinaria fabula eſt conflata et quoniam ad Padum mercatus illius gemmae inſtituerentur a Tarentinis, is fluuius nomen Eridani commeruit. Ab Italis Alexandrini acceperunt. Nam etiam nomen Italicum *fluuini* vulgatum eſt in Aegypto, vt ex *Clementis Alexandrini Stomatis* colligo (*i*). Τὸ δάκρυον, inquit, τῇ σύχιον ἐπιστᾶται τὰ κάρφη ἢ τὸ ἤλεκτρον τὰς ἀχυρμὰς ἀνακινεῖ. Cum in honore eſſet Alexandriae, βερονινη dici coepit (vnde *vernicem* adhuc dicimus) et corruptum ex eo βερνικάριον. *Nicomedes* in gloſſis: βερνικάριον νίτρον εὐθρὸν, οἱ δὲ ἤλεκτρον, οἱ δὲ βερονίκην. Credo a *Beronice Ptolemaei* et *Arſinoes filia Ptolemaei Soteris* coniuge, cuius crines *Conon Samius* et *Callimachus* conſecrarunt, *deuotas flaui verticis exuuias*, vt *Catullus* loquitur. Quod exemplum Nero Caeſar imitatus, quodam in carminae Pappaeae crines ſuccina vocauit. Et ſic *Nonnus Panopolita* (*k*).

(*i*) f. 370. (*k*) Dionyſ. Lib. XLII. 25.

εἰς σε κομίουσα
Δῶρα διαυγίλβοντα Φερεαυγέος Ἠριδανῖο
Ἠλιάδων δ' ὅλον ὄλβον ἐπαισχύνη σέο μορφὴ
Λευκὸν ἐρευθιόωσα, βολαῖς δ' ἀλιηρέποιος ἠοῦς
Ἴκελος ἠλέκτρῳ Βεροίης ἀμαρύσσεται αὐχήν.
ad te feram
Munera lucida lucidi Eridani,
Heliadum tamen omnes diuitias pudore ſuffundit tua forma
Candidum rubens radiis verum contra ſplendens aurorae
Similis electro Beroes reſplendet ceruix.

Mirum igitur non eſt, vt dixi antea, ſi Padum, vnde ſuccina Tarentini et Alexandrini accipiebant, illum Eridanum eſſe putauere. Scholia in Aratea Germanici: *ab Arato et Pherecyde Eridanus Padus eſſe putatur.* Marcianus Capella: *Italia etiam Pado flumine memoranda, quem Graecia dixit Eridanum.* L. Ampelius: *Eridanus et Tiberinus in Italia.* Sed quid per obſcura nomina incedimus, cum habemus Polybium (*l*) ὁ πάδος ποταμὸς, ὑπὸ δὲ τῶν ποιητῶν Ἠριδανὸς θρυλλούμενος. *Theophraſtus* quoque (*m*) ἐπεὶ καὶ τὸ ἤλεκτρον λίθος, καὶ γὰρ ὀρυκτὸν τὸ περὶ Λιγυστικήν. *Theophraſtus in Liguria effodi dixit*, inquit *Plinius.* Sic alii apud Plinium. Nemo tamen eos lepidius exagitauit quam Lucianus Samoſatenſis. Erant enim ſuccina teſte Plinio etiam apud Macedonas Syros in honore. Lucianus autem (*n*) ita ridet, vt adpareat hominem ob ſuccini luxuriam ab Nerone ante ſe natum inuectam, non ignoraſſe, vnde ſuccina perferentur. Itaque fingit, ſe profectum naui ad Eridanum, ſe Padum Italiae, id vnum ſpectaſſe, quomodo explicato ſinu cadentes Heliadum lacrumas exciperet, ὡς

(l) Lib. II. Cap. 16. (m) περὶ λίθων f. 6. (n) Tom. II. p. 369.

ὡς ἤλεκτρον ἔχοιεν, vt et ipſe ſuccina, rem adeo pretioſam haberet. Sed cum proficiſceretur aduerſo flumine, nec arbores iſtas ſuccini feraces vsquam locorum vidiſſe, nec electrum nec notum Phaethontis nomen et adeo carminibus celebratum apud *Patauinos* inaudiuiſſe: quaerentem etiam ex nautis, quando tandem ad illa feracia ſuccinis loca peruenturi eſſent, irriſum inſuper interrogatumque fuiſſe, quae ſibi ſuccina diceret, quem Eridanum? Narraſſe ſe fabulam omnem veluti ad gnaros: tum vero illos ſciſcitatos eſſe, quis impoſtor haec tam manifeſte vana ipſi narraſſet: neque enim ſe aurigam caelo lapſum audiuiſſe, neque eiusmodi arbores: ſi quid eius rei apud ſe naſceretur, nae ſe non duorum mercede obolorum remigaturos, cum poſſent e collectis arborum lacrumis opes vel regias comparare. Itaque ſe perturbatum ſpe omni peregrinationis excidiſſe, veluti ſuccinum mox ſinu excipiendum, rem adeo caram et pretioſam aliquis excuſſiſſet, cum iam ſecum computaſſet, quantus ex vna re fructus ſibi rediturus eſſet. Sic ille Graeculos naſo adunio ſuſpendebat.

Alii cum animaduerterent Rhodanum in Iberia aliquid eiusmodi habere, quod Eridano conueniat, hic putarunt ſe ſuccina reperturos. In eorum numero, nec dicam poetas, *Theophraſtus* quoque fuit. *Theophraſtus* inquit *Plinius*, *oceano id exaeſtuante*, *ad Pyrenaei promontorium eiici*: *quod et Xenocrates credidit*, *qui de iis nuperrime ſcripſit*. *Athenaeus* (o) *Hieronem* Syracuſanorum regem in naui aedificanda ſcribit aliam ex Italia materiam, aliam ex Iberia petiiſſe, κάνναβιν τε ἢ κίτλον ἐκ τῆ

(o) Lib. V. Cap. 10.

τῦ Ἠριδανῦ sic enim legit *Eustathius*, cum *Casaubonus* e codice suo edidit Ῥοδανῦ τῦ πολαμῦ.

Hae cum tam discrepantes essent sententiae, accessit *Apollonius Rhodius*, qui omnes inter se conciliaret. Credidit enim Eridanum tribus alueis et in septemtrionalem occanum et in *Adriaticum Ligusticumque* mare effundi. *Rhodanum* dicit et *Padum* et illum ignotum, at illustrem poetarum monumentis Eridanum. Comectura haec erat nixa fide vanorum hominum, nec nisi poetae condonanda. Argute sane *Plinius*: *faciliorem veniam facit ignorati succini, tanta orbis ignorantia.*

Alia quoque causa est, quamobrem Eridanum crederent esse Padum. Audiuerant ab Eridano perferri succina, audiuerant quoque a Venetis perferri. Iam Veneti ad Padum erant, idcirco in opinione sua confirmabantur. Sed nos in his obstinati sumus. Scilicet audiuerant, succina legi a Venedis. Venedae igitur in his succiniferis regionibus coluere et succina transmisere ad Rhudonem seu Eridanum. *Scylax Caryandensis*: μετὰ δὲ Κελτὸς Ἐνετόι εἴσιν ἔθνος ἢ πολαμὸς Ἠριδανὸς ἐν αὐλῶι. Non satis apparet inaudiueritne Scylax aliquid de Venetis Circumpadanis, an de Venedis nostris. Nam profecto ne dicam Scylaci, Herodoto quoque Ittus omne Adriatici maris ita ignorabatur, vt huius Baltici. Celtas autem dicebant etiam veteres non modo populos ad Rhenum, verum etiam omnes Germanos et Ephorus id nomen protendebat vsque ad Vistulam. Inde rursum noui errores. Pausanias (*p*) Eridanum per Gallos volui ait, serius autem

(*p*) f. 10.

tem Gallos vocatos, qui antea Celtae dicerentur. (*Scholia Heſiodi* Theog. v. 338. Ἠριδανὸς ποταμὸς Κελτῶν.)

In his tenuibus ſane veſtigiis conſecutus ſum Venedas coluiſſe antiquiſſimis temporibus a Viſtula admodum ad Dunam fluuium. Hic ergo Electrides quoque inſulae feuere. Credo Graecos de Sembia et vtraque Neringia in Pruſſiae littoribus inaudiuiſſe, fortaſſis etiam de inſulis, quae Liuoniae praetenduntur. *Plinius* de Electridibus: vanitatis certiſſimum documentum: *adeo, vt quas earum deſignent Graeci, haud vmquam conſtiterit.* Saluae e contrario nunc res ſunt, vbi ſitus locorum inſulas continenti praetentas omnium oculis obiicit. Hic ſuccina proueniunt, hic Electrides ſunt.

Poſtquam Venedas ſuis in locis conſtituimus, quae gens, vnde orta ſit, quaeremus. Habet ſuos Venetos *Homerus* in Paphlagonia (*q*). Prolixus in iis eſt pro ſua conſuetudine *Homerus* et ad Euſtathium et ad Periegetem. In quibus id quoque eſt, veteres Ὀνενετιαν quinque ſyllabis pronunciatiaſſe, ſuo tempore Βενετιαν dici. Nihil dicam de his, quae de Venetis ad Padum illorum e Cappadocia colonis referuntur. Nihil enim facilius eſt, quod *Grotius* prudenter monuit, quam vt in longe diſſitarum gentium nominibus, ſi forte aliquo ſono congruant, decipiamur. De his noſtris Venedis dicam. *Iornandes* ſic ait: *ab vna exorti ſtirpe tria nunc nomina reddidere Ve-*

(*q*) Il. B, 852. Schol. Apoll. ad Lib. II. v. 358.

neti, *Antes*, *Sclaui*. Leibnitius in miſcellaneis Berolinenſibus Antes et Vendos eosdem eſſe opinatus eſt et ſola pronunciatione differre, *littera w*, (*vt paſſim fit*) *nunc praepoſita*, *nunc omiſſa*. In eo ego deliberandum cenſeo, propendet tamen in diuerſa animus. Sed qui poſſunt eiusdem ſtirpis et Venedae et Sclaui eſſe, qui toto genere linguae discreparunt. *Hartenochius* Sclauonice fuiſſe locutos contendit, quod nunc Vinidi eo ſermone vtantur. Verum enim vero ſi rem explorari ab ſtirpe oportet, Venedae nequaquam Sclauonice ſunt locuti. Nam illi qui adhuc in agro Luneburgico ſuperſunt, medii inter Germanos, adſciuerunt quidem quaedam Germanica, ſed totum adhuc ſermonem *Prutenicum* qualis olim fuit Lituanicum Curonicum conſeruant, vt eorum lingua tantum differat a Slauonica, quantum Luſitanica ab Islandica et Romana a Graeca. Id alias pluribus oſtendam, cum cognatas linguas inter ſe conferam in tabula, ad conſtituendam populorum Scythicorum neceſſitudinem. Nunc tantum preces ſanctiſſimas domini deique noſtri ex *Io. Georgii Eccardi* hiſtoria ſtudii Etymologici in teſtimonium producam. Caue ſcopulum (v. Leib. Coll et. etym.). Sunt in his plurima Germanica, quaedam Sclauonica, quod Venedae inter eas gentes coluerunt, at manent adhuc veſtigia veteris linguae Scythicae, quae non niſi ab antiquiſſima ſtirpe. Niſi qui dicere malit, et Scythas et Sarmatas in vnum corpus confluxiſſe. Id vero ipſum nomen

men Venedarum indicare videtur. Nam *Venden* his, quas dixi linguis significat *societatem colligere*, quod verosimilius est ἔτυμον, quam *Matthaei Praetorii*, qui quasi *Panaitas*, *rerum dominos dictos* putauit. Sed Venedi in Hexapoli Lusatiae ob longum vsum linguae Sclauonicae magis adhuc degenerarunt. Venedas autem Sarmatici corporis non fuisse, etiam *Cornelius Tacitus* audiuerat: *Venedi multum a moribus Sarmatarum traxerunt: nam quidquid inter Peucinos Fennosque syluarum ac montium erigitur, latrociniis pererrant: hi tamen inter Germanos potius referuntur, quia et domos figunt et tecta gestant et pedum vsu ac pernicitate gaudent, quae omnia diuersa Sarmatis sunt, in plaustro equoque viuentibus.*

DE CONFVCII LIBRO

Chūn çiu.

AVCTORE

T. S. Bayer.

EX omni copia Sinicorum librorum pauci quidam publica auctoritate et legibus imperii sic comprobati fuerunt, vt secundum eos iuuentus eruditur, prouecti aetate studiisque litterarum examinentur et pro portione cognitionis eorum scientiaeque, dignitatum gradus consequantur, denique, vt quidquid ad morum disciplinam, ad rempublicam administrandam, contemplandam naturam, vetustissimam rerum gestarum memoriam proponatur, ex iisdem diiudicari oporteat. Hos libros Missionarii omnium ordinum percommode *classicos* vocitarunt, vt quondam ciues Romani classici fuerunt dicti, qui in prima classe propter facultates suas censebantur, cum *infra classem* dicerentur, secundae ceterarumque ciues, qui minorem summam aeris apud censores profiterentur, proletarii et capite censi in extrema consisterent, aut potius nullo loco haberentur. Eum in modum, librorum Sinicorum quatuor classes constituere mihi videor posse, vt in prima sint *Kīm*. *Kīm*, proprie, *fila recta in opere* Tabula XVI. Figura [1.] *textorio*, seu *stamen*, significat, vt *Gvey*, *transuersa fila*, seu *subtemen*. Inde illarum vocum notatio ad caelum relata fuit, vt *kīm* dicantur *stellae fixae*, *auster et septemtrio*,

trio, ſeu *latitudo aſtronomica*: *gvéy* econtrario, *planetae*, *orientes et occidentes*, ſeu *longitudo aſtronomica*. Relata quoque fuit ad alias res, eſtque *kīm*, *norma*, *ratio regulaque*, ſecundum quam aliquid exigatur. Iam cauſſa appa- Tabula XVI ret, cur *V kīm*, *quinque libri*, et quaſi *Pentateuchus* nun- Figura [2] cupentur, qui primum dignitatis gradum tenent atque hoc ordine recenſentur. Primum eſt *Tè kīm* deinde *Xū kīm*, [3] [4] poſtea *Xī kīm*, tum *Lŷ ki*, et quinto loco *Chūn çieu*. [5] [6] [7] Altera in claſſe ſunt libri *Su xū*, ſeu *quatuor libri* et quaſi [8] *Tetrateuchus*. Tres, inquam, Confuciani, *Ta hiŏ*, *Chum* [9] *yûm*, et *Lún yú*: quarto loco ſcripta *Mem çu*, ſeu *Mem* [10. 11. 12] *cii* philoſophi, qui annis centum et octo poſt Confucii mortem natus eſt (*a*). Hi libri ſic paullo minori in dignitate ſunt, quam *V kīm*, vt ceteroqui ſint in ſumma. Idcirco *V kīm* et *Su xū* communi nomine dicuntur *Lo kīm*, id eſt, *ſex Kim*, ſeu *ſex libri claſſici* (*b*). Intra has duas claſſes Philippus Coupletus et ex eadem Societate ceteri omnes conſtiterunt, praeter vnum *Nicolaum Longobardum*. Hic commotus teſtimonio *Michaelis* Doctoris Sinici, ſed, qui Chriſtianum nomen profeſſus fuit (*c*), non modo illos, quos dixi, libros, ſed eorum quoque veteres interpretes et philoſophiam *Sim ly* et annales *Tum kién* claſſicis inſeruit. Antonius de S. Maria, Miſſionariorum ex familia Franciſci praefectus (*d*), eosdem

(*a*) Ante A. C. 372. (*b*) Videatur Philippi Coupleti declaratio Proëmialis ad Confucium p. 15. (*c*) p. 259. inter epiſtolas Leibnitianas Tomo II. ed Kortholti, vbi pro *Tien kien* legi oportet *Tum kien*. (*d*) Perperam ibi quoque *Ta civen ſing ly*.

eadem auctoritate esse contendit, qua sint antea a me commemorati libri. Coupletus, neque interpretes qui fuerint, reticuit, neque quae illa philosophia naturalis *Sim ly ta civen*, quanta denique eorum omnium apud Sinos sit auctoritas, dissimulauit. Neque eo inficias, cum historicorum multitudo exstet prope infinita, annales *Tum kién*, qui multis voluminibus omnium memoriam aetatum complectuntur, quorumue maxima pars ex officina *Çu chí* in bibliotheca Regis Prussiae Berolini est reposita, ceteris chronicis fama et existimatione eruditorum longe anteire. Itaque nihil me vetat, hosce libros, quod et ipsi publica auctoritate sunt confirmati, in classe ponere, attamen tantummodo in tertia. Proletarii denique nobis erunt quarta in classe, cum priuati sint omnes et quasi sine censu. At Iesuitae cum classicos tantummodo appellant *Lo kīm*, seu *sex volumina*, quae in prima classe et in secunda recensuimus, tum Sinorum iudicio, tum suo quodam iure agunt. Vt in Romanorum ciuium classibus census grauis aeris, sic in hac controuersia, antiquitas decernit. Recepti sunt igitur omnes hi libri, at dignitate fortunaque diuersa. Non potuerunt vel Nicolaus Longobardus, vel Antonius de S. Maria, vel Nauarreta, ceterique Iesuitarum aduersarii diffiteri, illam de natura commentationem, auspiciis *Tum lo* Imperatoris, circiter A. C. 1415 promulgatam fuisse. Interpretum Sinicorum, item vt auctorum chronici *Tum kien* diuersae fuerunt aetates, vniuersi tamen, Sinis ipsis testantibus, Confucio multo recentiores exstiterunt. Itaque Iesuitae, cum hos vel a priscorum Sinorum sententia, vel alioqui a vero aberrasse deprehendant, non admittunt tamquam classicos,

Tabula XVI. Figura 13.

[14]

[15]

hoc

hoc eſt, quod cuiuis licet ſapienti homini, ab eorum opinionibus ad vetera monumenta prouocationem ſibi dari poſtulant. Vt ſi de Ariſtotelis philoſophia diſceptatio oriatur, non modo Conimbricenſes, et Scholaſticos, ſed etiam Porphyrium ceterosque interpretes Graecos, tametſi priſcos, non huius faciemus, vbi in Ariſtotele mens erecta et ſubtilis omnia alia reperiet. At Sini peregrinos homines vetera monumenta ſuae gentis eorum arbitratu explicare non ferent, non patientur. Ne iſthuc quidem in Ariſtotele ſtatui aequo animo paſſi ſunt Scholaſtici, tamen vis veritatis tempusque, quantum potuerint, non obſcurum eſt. Irriſus eſt a Bonzio aduerſario *Matthaeus Riccius*, vt *Longobardus* teſtatur, econtrario collaudatus idem eſt a litteratiſſimis inter Sinas viris, neque vnquam Ieſuitis fraudi fuit, ab omnium interpretum ſententia diſſenſiſſe, cum praeſertim aliis in diſciplinis demonſtraſſent, quantum Europaei et ingenio et ſcientia Sinos antecellant. Sed tametſi hi libri claſſici tanta in auctoritate ſunt, attamen eorum non eadem ſemper fuit conditio. Nam liber *Chūn çieu* ſero ad ſummum gradum eſt euectus, cum quidam ex philoſophis, vt *Tu yu*, dignum iudicaſſent, qui ceteris *Kīm* aequiperetur, immo cum *Lieu chi ki* antiquitate quoque cum *Xu kīm* comparaſſet. Receptus eſt denique in primam claſſem ſub dynaſtia *Sy Hia*, quae vt ad R P. Stephanum Soucietum (*e*) relatum fuit, in *Xen Sy* ceterisque occidentalibus prouinciis extra moenia regnauit, cum dynaſtia *Sum* orientales teneret, donec *Sy Hia* circiter A. C. 1226. a Gingiſiane debellata et deleta fuit.

(*e*) *Obſervations Mathematiques Aſtronomiques* etc. Tomo II. p. 2.

fuit. Sed omnium librorum classicorum tantum fragmenta habemus. Nam Imperator *Xi Hoam ty* anno ante C. N. 213. omnes libros toto imperio, quod primus omnium Imperatorum summo dominatu rexit, moenibusque ad septemtrionem et occidentem cinxit, opere, nisi adhuc exstaret, ad posteritatem incredibili, omnes igitur libros, praeter medicos et iuridicos mandato seueriſſimo conquisitos exussit. Tanto eorum flagrauit odio, vt anno post, litteratos homines complures viuos sub terra defoderet, credo, quod simul cum chartis ipsam rerum sententiarumque, quas in iisdem damnabat, memoriam in his eruditis viris superstitem, exstinctam vellet, ne aliquando ex ea libri ipsi ab obliuione atque interitu vindicari possent. Annis post, tribus et septuaginta *Vu Ty*, ex dynastia *Hia* regnare coepit, Imperator, quemadmodum Sini iudicarunt, ita fortissimus rebusque gestis clarissimus, vt singulari fuit sapientia. Is vndique toto imperio fragmenta librorum maximo cum discrimine occultata congessit, partem etiam ex doctorum hominum memoria requisiuit. Illius etiam studio iterum digesti emendatique sunt prisci libri, et commentariis illustrati: qui interpretes sub familia *Hia*, omnium, qui eos consecuti sunt, duces et antesignani fuerunt. Item igitur his in libris euenit, quod Romae post exussum ciuili inter optimates et Marianam factionem bello Capitolium, Sibyllinis carminibus accidit. Nam quaesitis Samo, Ilio, Erythris, per Africam quoque ac Siciliam et Italicas colonias Cumaeae Sibyllae ceterarumque, si quae fuerunt aliae, carmini-

minibus, datum ſacerdotibus et eorum magiſtris negotium eſt, *quantum humana ope poſſent, vera diſcernere* (*f*). Vereor autem, ne idem deinde Sinicis libris quoque acciderit, quod Sibyllinis, quibus non modo ita integris, ſed etiam vitiatis ſuſpectisque poſtea vſi ſunt Romani, quamobrem a C. Tiberio Caeſare accepimus (*g*), *quia multa vana ſub nomine celebri vulgabantur, ſanxiſſe Auguſtum, quem intra diem ad praetorem vrbanum deferrentur, neque habere priuatim liceret.*

Venio nunc ad Confucii *Chun çieu* ſpeciatim recenſendum. Is liber hiſtoriam multorum annorum complectitur. Enimuero neque de ea hiſtoria, neque de toto libro dicere me poſſe ſentio, priusquam explicatum a me ſit, qui ſtatus imperii Sinici et antea fuerit, et illis temporibus, quae liber *Chun çieu* comprehendit. Tres dynaſtiae ſeu familiae Imperatoriae, quae in Sinis primae fuerunt, ſibique ſucceſſerunt, maxima feruntur fama, quod earum res partem in *Xu kim*, partem in *Chun çieu* ceterisque libris claſſicis traduntur: ſed multo, vt opinor, maxime, quod ſtatus imperii, qui tam fuit, a *Xi Hoam Ty*, quem ſupra commemoraui, penitus ſublatus, neque vmquam, imminuta Imperatorum maieſtate, reſtitutus, immenſum ſui deſiderium, apud obſtinatos libertatis recordatione animos, et nullam imperii, etiam multo ſapientius, iuſtius clementiusque et ſecundiſſima ex merito gloria gerendi geſtique felicitatem, extra illam libertatis conditionem, ſatis aeque adſenſu ferentes,

(*f*) Tacitus Annalium Lib. VI. Cap. 12. (*g*) Tacitus ibidem.

reliquit. Miraculo ſimile eſt, potuiſſe tantum imperium ruinam atque interitum poſt tot ſecula effugere, in quo libri ſint legum auctoritate confirmati, quos vniuerſi in caelum fere laudibus, explicent publice, priuatim ediſcant, quos Imperatores ipſi in deliciis honoreque habeant, ex quibus ſibi ſuisque exempla ad imitandum proponant, in quibus tamen ſeditionum foecundae ſint ſegetes, cum in primis liceat licueritque impune, formulam illam imperii, quam hi libri produnt, vti optimam commendare, quae, niſi euerſa Imperatorum maieſtate, aut ſaltem magnopere imminuta, exiſtere non poſſit. Neque vero obſcurum eſt, res Sinici imperii ex armalibus recordanti, nihil adeo tot domuum Imperatoriarum ruinam acceleraſſe, quam animum populi, illius vetuſtiſſimi ſtatus deſiderio et exſpectatione imbuti. Ea quoque cauſſa fuiſſe videtur, quamobrem Confucius, qui naſcentem aetate ſua et ad id faſtigium, quod deinde conſecuta eſt, adſpirantem, ſed libratam adhuc mutua principum aemulatione potentiam ferre non poſſet, et magiſtratu euerſus fuerit et ad mortem quaeſitus, vt diu cum egeſtate conflictatus, nusquam tutum ſortunis ſuis locum reperiret, ac denique vel maritimo curſu, vel terreſtri itinere ad barbaros fugiendi conſilium caperet. Habebat ille multa, quae in ſeculo ſuo, iure meritoque redargueret, virtutis, neque ita impenſe, vt cupiebat Confucius, neque quantum ea ſuperiorem aetatem floruiſſe exiſtimabat, ſtudioſo, tametſi etiam olim foeda exempla haud minus, quam Confucii ſeculo, ſtatuta fuerant. Sed iſthuc apparet, cum potiſſimum reprehendiſſe, quod priſtinus imperii ſtatus conuelleretur, cum etiam minimis in caeremoniis nihil nouari mallet, quae prae-

praecepta deſtinato principum conſilio vehementer adverſabantur. Idcirco *Xi Hoam Ty* cum tandem optata ceterorum principum, et maxime maiorum domus ſuae impetraſſet, oppreſſisque tot regulis, ſolidum imperium plena poteſtate gubernaret, hanc cum philoſophorum tum hiſtoricorum ſeditioni nimis ſeuere repreſſit. Sed videbat, monarchiam conſiſtere non poſſe, niſi infinita priſtini ſtatus, vtcumque turbulenti et in commune pernicioſi, exiſtimatio ex animis hominum vi maxima illata exſtirparetur.

Principio Sinae multo minoribus terminis circumſcriptae fuerunt, quam nunc ſunt. Confucii aetate fere intra hos limites, quos nunc ſub borea et occidente murus Sinicus definit, et florentiſſima quidem pars earum intra fluuios *Hoam* et *Kiam* atque regnum *Xan tum* comprehenſa fuit. *Quam tum et Quam ſy* regna ſub auſtro maxima annis denique centum et ſeptuaginta ante C. N. huic imperio ſeſe ſubiecerunt, cum ab omni aeuo ſui iuris fuiſſent. Sed neque imperii, ea quae nunc eſt, diuiſio locum inuenit, neque ea vel prouinciarum vel vrbium, fluuiorum, montium, quae hodie celebrantur nomina exſtiterunt. Quotiescunque *Philippus Coupletus* in vetuſtiſſima memoria regionum locorumque, quae nunc ſunt, nomina adhibet, hiſtoricorum recentiorum auctoritatem ſequitur, qui pro obſoletis ſubſtituerant noua. Nam vt apud nos veteri in Latio et Graecia omnique veteris orbis geopraphia antiquariorum induſtria elaborauit, ne quem ex priſca memoria locum, vbi nunc ſitus ſit, quoue nomine nuncupetur, ignoraremus, ita eodem in ſtudio Si-

nenſes occupatos fuiſſe inuenio, vt id ipſum in orbe ſuo poſteritati non lateret. Fuerunt deinde multi principatus, qui ad ſui defenſionem et ad populorum commune vinculum vni alicui ſumamm rerum ſine ſucceſſione eius domus committerent. Tandem quod hi principatus haereditarii eſſent, placuit, vna in domo ſummam dignitatem transferri ad ſeros nepotes. Sic orta eſt prima dynaſtia
Tab. XVI. F.[16][17] Imperatorum *Hia*, hac cuerſa, ſucceſſit ſecunda *Xam*,
[18] et huic oppreſſae tertia *Cheu*, ſub qua Confucius vixit.
[19] Ceteri principatus etiam Confucii aeuo dicebantur *que*, quod vocabulum ſiue *regnum* ſiue *principatum* interpreteris, haud magno in diſcrimine ponam. Reguli igitur illi ex proſapia *Hoam Ty* (*b*) item vt Imperatorine domus orti, agros ſuos ex haereditate tenebant, at legibus et inſtitutis ex foedere cum Rege deuincti erant, et ad maieſtatem eius tuendam et ad omnem vim externam mutuis auxiliis opibusque propulſandam. Propter hanc conſociactionem dicta fuerunt *Lie qve*, ſeu *diſtributa atque coniuncta regna*. Eorum, mea in editione libri *Chin çieu* tabula geographica exſtat, inſcripta: *Lie qve*
[20] *yu ty chi tu*, *diſtributorum regnorum geographica tabula*. Fuit haec ſane, quod ex monumentis conſtat, antiquiſſima publicarum rerum forma, ſatis ad totius corporis hominum in ſocietate viuentium conſeruationem apta, donec tempus et multitudo mortalium et vicinorum populorum conditio, neceſſitatem eam impoſuit, vt publica res, niſi ſub vnius dominatu, ſalua eſſe non poſſet. Vetus

(*b*) Confer omnino *Tabulam Genealogicam trium familiarum Imperialium monarchiae Sinicae* ex Sinico Latine editam a P. Coupleto.

tus illa Sinicae rei publicae formula iſtiusmodi vtique fuit, qualem apud diuinum Moſen in Geneſi, vetuſtiſſimo omnium exemplo diſcriptam reperimus in Kedorlaomare rege Elamita regulisque ei dicto audientibus (*i*), ne nunc alia quoque ſanctiſſimae ſcripturae monumenta in teſtimonium producam. Et apud Graecos bello Troiano ille regum rex Agamemnon ceterique reges haud diſſimili conditione fuerunt. Apud Sinos vero regum regis maieſtatem in his fere maxime ſitam fuiſſe reperio, quod regulos ad comitia vocandi et de communi re conſulendi poteſtatem haberet, quod iis in comitiis ſublimi loco praeſideret, quod quaedam ſacra ſolus perageret, quae ceteros regulos peragere ius fasque non fuit, quod denique quibusdam aliis honoribus caeremoniisque ante ceteros regulos coleretur, quorum omnium quaedam in *Li ki* ad memoriam ſuperſunt. Quemadmodum in principum conſenſione maieſtatis eius cardo verſabatur, ita in diſſenſionibus vis principum maieſtate fuit potior. Inde paullatim nihil praeſidii in communem vniuerſorum ſalutem coepit eſſe, ſi praeſertim rex iniuſte atque immoderate ſeſe gereret, aut principum aliqui virium fiducia inſoleſcerent. Sic dynaſtia *Hia* deleta eſt, cum *Tam* regulus, iniuria accepta, ab octingentis regulis populoque contra poſtremum regem voluptatibus immerſum concitatus, arma ſumſiſſet. Is auctor fuit dynaſtiae Imperatoriae *Xam.* At haec dynaſtia, vt potentiam domus ſuae muniret, ad extremum coepit regulos atterere, donec poſtremus tam principes, quam populum crudelitate et ſuperbia offendit. Sic enim

(*i*) Geneſeos Cap. XIV.

regulo *Tēn* principatus, qui ea in regione fuit, quam Pequinenſi regno nunc accenſent, tam felici eſſe contigit, vt ſumma rerum potiretur. Victor regulas *Fa*, nomine abrogato, quod ei antea fuerat, *Vū Vam*, quaſi *Ptolemaeum regem* dici ſe voluit, dynaſtiamque Imperatoriam, quam in domo ſua exorſus eſt, *Cheū* nominauit. Vt Sini chronologi, qui nunc ſunt, a nobis flagitant, (nam tota illorum temporum chronologia res eſt admodum incerta) ab anno ante C. N. 1122 per 873 annos, Imperatores ex hac domo 35 exſtiterunt.

Hunc *Vū Vam* Imperatorem annales Sinici impenſe laudant, neque minus Abdallah Abu Said Beidaccaeus (*k*), qui hiſtoriam Sinicam ex ore quorundam philoſophorum Sinenſium, qui ante hos quadringentos et ſexaginta annos cum Hulacu Chano fuerunt, commentatus eſt Perſice. Et laudem vero illam ab iuſtitia, clementia ſapientiaque conſecutus eſſe dicitur: credo tamen munificentia et priſtino regni ſtatu reſtituto vniuerſos ſibi vel maxime deuinxiſſe. Nam cum quaedam regulorum familiae a dynaſtia *Xam* de gradu deiectae, aliae oppreſſae eſſent, et illas poſtliminio ad dignitates reduxit et bene de optimo publico meritos ex inferiori loco ad ſimilem ſplendorem euexit.

Igitur in mea editione libri *Chūn çiēu*, tabulae geogra-
Tabula XVI. Figura 21. phicae, de qua ſupra dixi, *xue* ſeu *praefatio*, de meritis eius et de ſtatu imperii, qui tum fuit, ſic retulit:

Chuén

(*k*) p. 26. vocat cum جو فرا وذك *Giu Fra Vāng*. At ſcribae alicuius hic error fuit, quem Andreas Muller non ſuſtulit totum. Apparet, ſcriptum fuiſſe a Beidauaco جو ذو وذك *Tſcheu Vu Vāng*, i e. *Cheu*, (vt recepto more ſcribimus, *Tſcheu*) dynaſtiae rex, nomine *Vu Vam*.

Tabula XVI. Figura 22.

Chuén *Dilatauit ſapienter*
chīn *et ponderauit vnius cuiusque merita*
Vu Vam } *Vu Vam Imperator,*
kè *qui vicit et ſubegit*
Xām. *dynaſtiam imperii ſecundam Xam.*
Quām yeu } *Ad ſolis inſtar illuſtrauit*
tiēn hia. } *terrarum orbem, ſeu, Imperium Sinicum.*

Poſtquam deinde narrauit, quemadmodum quindecim fratres huiusce *Vu Vam* et quadraginta ex *kì ſim*, ſeu *ki* [23] coniugis eius familia, regnis aucti fuerint, ita deinceps fatus eſt auctor:

Cio *Officiorum dignitatumque cum adſignatis reditibus (fuerunt)* [24]
u *quinque*
pin *ordines:*
eulh *et*
tu *terrarum (adſignatarum fuerunt)*
ſan *tres*
tem. *ſpecies.*
Cūm, *Eius qui Cūm dicebatur,*
Heû *(et eius) qui Heû dicebatur,*
pe *centum*
li. *ſtadia Sinica fuerunt.*

Pĕ,

P̆e, *Eius*, *qui P̆e apellabatur*
cie } 70
xe }
ly. *ſtadia Sinica fuerunt.*
Çu, *Eius*, *qui Çu vocabatur*,
Nân, *et eius*, *qui Nân appellabatur*,
u } 50
xe }
ly. *ſtadia Sinica fuerunt.*

Poſſimus *C̄un* vocare *Regulum*, *Heû* vero *ethnarcham*, *P̆e*, *Ducem*, nam reuera *ducem belli* ſignificat, *Çu*, *dynaſtam* et *Nân*, *Praeſidem*, vt apud Romanos, prouinciarum fuerunt praeſides. Summam deinde horum a dynaſtiae *Cheu* conditore adſignatorum *q̆ve*, ſeu principatuum colligit 1800. At vero, inquit:

Tabula XVI. Figura 25.

Cheu *ſub Cheu*
xe, *familia*,
kí } *paullatim facta ſunt debilia* (*regna*)
xuai }
Chuen *inuerterunt*
Siám *formam ſtatus*
tun } *et ſeſe mutuo deuorarunt.*
mie. }
So *Numerando*
pe *centum*
nien *annos*
kien, *intra*,

lie

lie *distributa*
qve *regna*
mào *penitus*
cin. *fidelia fuerunt.*
Chūn
çieu } *Libri Chūn çieu*
chi
xi, *aetate*,
kién *scilicet*
yu
kim } *in hoc libro (commemoratae)*
chuen
che } *dignitates cum prouentibus ad posteros haereditate propagatae*
çúm *in summa sunt*
ye
pe
eulh } 124
xe
ſu
qve. *regna.*

Quemadmodum igitur reguli et principes minores intra centum annos in fide Imperatoris et obsequio perstiterunt, post autem eidem refragari atque inter se simultates serere, et foedera passim ferire coeperunt, ita *Tam* Imperator ex familia *Cheu* nonus, qui 228 annis post conditam familiam imperio potitus est, tum ob mentis debilitatem, tum, quod regulis, qui ad comitia veniebant, ni-

mium concedebat, maieſtatem imperii publico ludibrio expoſuit. Eius filius labantem iam crudelitate et impotentia animi amplius concuſſit, nepos vero *Siven vam* prudentia inſigni ſuffulciuit. Iterum vniuerſorum animos abs ſe abalienauit eiusdem pronepos *Teu Vam*. Sic ad imperium peruenit *Pim vam* huius filius, tertius et decimus iſtius familiae. *Vu Vam* ſedem imperii conſtituerat in vrbe, quae nunc *Sy gan fu* vocata, in *Xen fy* ſita eſt. At *Pim vam* eam in *Vam chim* vrbem transtulit: ſita illa fuit in prouincia, quae nunc *Ho nan* dicitur. Hoc conſilium vt prudenter captum fuiſſe videtur, propior enim nunc regulis maxime florentibus erat Imperator, ſic audaciores reddidit regulos, qui iam impune inter ſe foedera faciebant et bella ſerendo poteſtatem in dies magis magisque augendi cupiditate flagrabant et Imperatori dicto audientes non erant.

Tabula XVI Figura 26.

Inter tot principatus duodecim maxime fuerunt inſignes, tum propter opes, tum ob diuturnitatem ſucceſſionis. Succeſſionem regulorum illis in dynaſtiis eruditus editor Sinus ad ſingulos annos in *Chūn çīeu* diligentiſſime annotauit, regiones in tabula deſcripſit. Et tantum potuit vis obfirmatorum antiqui ſtatus ſtudio animorum, vt non minus quam Imperatoriam dynaſtiam *Cheu*, hos quoque regulos rebelles aſteriſſimis inſereret poſteritas. In *Xan tum*, vt nunc quidem prouincia vocatur, fuerunt, *Lu*, *Cî*, et *Kì*, in *Ho nan*, *Gvéy*, *Sum*, *Chim* et *Chin*, in *Hu quam*, *Çù*, in *Pe kim*, *Çí* et *Çâo*, in *Xen ſy*, *Çin*, in *Xan ſy*, *Çin*. Sed multo plures principatus, praeci-

Tabula XVI. F.[27.][28.][29.][30.][31.][32.][33.][34.]

praecipue in *Xam tum* exſtiterunt non obſcuri, in primis vero *Ten*, *Hán Chū Siao chū Tvè Kiu Pie* et alii. Non erit in conſulte factum, ſi regulos ex duodecim dynaſtiis praecipuis, qui ad aetatem libri *Chūn çiēu* pertinent, hic ordine ſuo ponam.

I. *Lù* reguli, qui omnes a dignitate in imperio vocati ſunt *Cum* (*l*). [35.]

Tn cum, cuius annus primus congruit cum anno 49. [36.]
Imperatoris *Pim Vam* et cum 56. cycli XXXIII. ſeu, cum A. ante C. N. 722. inde vsque a vere, a qua auctumnitate omnes omnium regulorum cunctis in dynaſtiis anni et quidem ſemper abſoluti numerantur.

Huon cum,	ab A. ante C. N.	711.	annos	18.	[37.]
Chuam cum,	- -	693.	-	32.	[38.]
Min cum,	- -	661.	-	2.	[39.]
Hy cum,	- - -	659.	-	33.	[40.]
Vèn cum,	- - -	626.	-	18.	[41.]
Sivēn cum,	- -	608.	-	18.	[42.]
Chim cum,	- -	590.	-	18.	[43.]
Siâm cum,	- -	572.	-	31.	[44.]

(*l*) Idcirco in tabula Sinicorum characterum tantum in primo nomine (num. 36) poſuimus *Cum*, ne eadem in littera ſaepius repetenda fruſtra fatigaremus operas.

Tabula XVI. Figura 45.

Chao cūm, - - 541. - 32.

[46.] *Tym̀ cūm*, - - - 509. - 15.

[47.] *Gāi cūm*, - - - 494. - —

In eius 14. anno desinit liber *Chūn çieu*.

[48.] II. *Çî*, reguli, qui omnes dicuntur *Cūm*.

[49.] *Hi cūm*. Eius nonus annus congruit cum primo anno *Yǹ cūm*, in *Lù*, 33. annus, quo obiit, cum A. ante C. N. 698.

[50.] *Siām cūm*, ab A. ante C. N. 697. annos 12.

[51.] *Hûon cūm*, - - 685. - 43.

[52.] *Hiáo cūm*, - - 642. - 10.

[53.] *Chāo cūm*, - - 632. - 24.

[54.] *Hóei cūm*, - - 608. - 10.

[55.] *Kìm cūm*, - - 598. - 17.

[56.] *Lîm cūm*, - - 581. - 28.

[57.] *Chûām cūm*, - - 553. - 6.

[58.] *Kìm cūm*, - - 547. - 58.

[59.] *Gān yú S. Gān infans*, - 489. - 1.

[60.] *Taó cūm*, - - 488. - 4.

[61.] *Kièn cūm*, - - 484. - —

In eius 4. anno desinit liber *Chūn çieu*.

III.

III. *Çín*, cuius dynaſtiae reguli partim *Heu*, partim *Cūm* fuerunt. Tabula XVI. Figura 62.

Ŏ *heu.* Eius annus ſecundus congruit cum primo anno *Yn cūm* in *Lù*, 6. quo obiit, cum A. ante C. N. 718. [63.]

Gāi heu, ab A. ante C. N.	717.	annos	9.	[64.]
Siao çu heu, - -	708.	-	4.	[65.]
Miên heu, - -	704.	-	28.	[66.]
Hién cūm, - -	676.	-	26.	[67.]
Hóei cūm, - -	650.	-	16.	[68.]
Ven cūm, - -	633.	-	7.	[69.]
Siām cūm, - -	627.	-	7.	[70.]
Lim cūm, - -	620.	-	14.	[71.]
Chim cūm, - -	606.	-	7.	[72.]
Kim cūm, - -	599.	-	19.	[73.]
Ly cūm, - -	580.	-	8.	[74.]
Cum cūm, - -	572.	-	15.	[75.]
Pim cūm, - -	557.	-	26.	[76.]
Chao cūm, - -	531.	-	6.	[77.]
Kim cūm, - -	525.	-	14.	[78.]
Tim cūm, - -	511.	-	—	[79.]

In eius 31. anno *Chūn çīeu* definit.

Tabula XVI. Figura 80.

IV. *Gvéy*, cuius reguli omnes *Cūm*.

[81.] *Hûon cūm*. Eius 13. annus congruit cum primo anno *Ỳn cūm* in *Lù*: 16, quo a ſuis occiſus eſt, cum A. ante C. N. 719.

[82.] *Sivēn cūm*, ab A. ante C. N. 718. annos 19.

[83.] *Hoēi cūm*, - - 699. - 31.

[84.] *Ỳ cūm*, - - 668. - 9.

[85.] *Vên cūm*, - - 659. - 25.

[86.] *Chîm cūm*, - - 634. - 35.

[87.] *Mŏ cūm*, - - 599. - 11.

[88.] *Tim cūm*, - - 588. - 12.

[89.] *Hién cūm*, - - 576. - 33.

[90.] *Siam cūm*, - - 542. - 9.

[91.] *Lîm cūm*, - - 534. - 42.

[92.] *Cho cūm*, - - 492. - —

In cuius 12. anno liber *Chŭn çieu* deſinit.

[93.] V. *Çí*, cuius reguli *Cūm* dicti.

[94.] *Sivēn cūm*. Eius 28. annus congruit cum primo anno *Ỳn cūm* reguli in *Là*: 35. annus, quo mortuus eſt, cum A. ante C. N. 715.

[95.] *Hûon cūm*, ab A. ante C. N. 714. annos 20.

[96.] *Gāi cūm*, - - 694. annos 20.

Tabula XVII. Figura 1.

Mŏ cūm, - - 674. - 29.

[2.] *Chŭam cūm*, - - 645. - 34.

Vên

Tab. XVII. Figura 3.

Ven cūm, - - 611. - 20.

Kim cūm, - - 591. - 49. [4]

Lim cūm. - - 542. - — [5]

Illius anno 12. ſiue A. ante C. N. 531. *mie, exſtincta eſt haec familia.* [6]

Tao cūm, *tum qve* ſeu, *Tao cūm reſtituit* regnum *Çi*, quod ei ex haereditate debebatur, 521. - 3. [7] [8]

Chao cūm, - - 518. - 28. [9]

Chim cūm, - - 490. - — [10]

Eius in anno 10. *Chūn çieu* deſinit.

VI. *Chim*, Reguli dicti *Cūm.* [11]

Chuam cūm. Eius 22. annus congruit cum 1. anno *Tn cūm*, reguli in *Lu.* 43. quo mortuus eſt, cum A. ante C. N. 701. [12]

Chim cūm, ab A. ante C. N. 700. annos 28. [13]

Ven cūm, - - 672. - 45. [14]

Mo cūm, - - 627. - 23. [15]

Siam cūm, - - 594. - 20. [16]

Chim cūm, - - 584. - 14. [17]

Hi cūm, - - 570. - 5. [18]

Kien cūm, - - 565. - 49. [19]

Tim

Tab. XVII. Figura 20.

Tím cūm, - - 529. - 16.

[21.] *Hien cūm*, - - 513. - 13.

[22.] *Xīn cum*, - - 500. - —

In eius 20. anno definit *Chūn çieu*.

[23.] VII. *Çáo*, cuius reguli *Cūm*.

[24.] *Huòn cūm*. Eius annus 23. congruit cum anno primo *Tìn cūm* dynastae in *Lù*: annus eiusdem 55. quo mortuus est, cum anno ante C. N. 702.

[25.] *Ghuam cūm*, ab A. ante C. N. 701. annos 40.

[26.] *Chāo cūm*, - - 661. - 9.

[27.] *Cūm cūm*, - - 652. - 35.

[28.] *Vên cūm*, - - 617. - 23.

[29.] *Sivèn cūm*, - - 594. - 17.

[30.] *Chím cūm*, - - 575. - 23.

[31.] *Vù cūm*, - - 554. - 27.

[32.] *Pím cūm*, - - 527. - 4.

[33.] *Táo cūm*, - - 523. - 9.

[34.] *Xīm cūm*, - - 514. - 5.

[35.] *Tìn cūm*, - - 509. - 4.

[36.] *Cím cūm*, - - 505. - 4.

[37.] *Tám cūm*, - - 501. - —

Eius anni 21. desinit liber *Chūn çieu*.

VIII.

VIII. *Chin*, cuius reguli *cum* dicti fuere. Tab XVII. Figura 38.

Huon cum. Eius annus 23. congruit cum primo anno *Yn cum* reguli in *Lu*: annus 38. quo anno eſt mortuus, cum A. ante C. N. 707. [39.]

Ly cum, ab A. ante C. N. 706. annos 7. [40.]

Chuam cum, - - 699. - 7. [41.]

Sivēn cum, - - 692. - 45. [42.]

Mo cum, - - 647. - 16. [43.]

Cum cum, - - 631. - 18. [44.]

Lim cum, - - 613. - 15. [45.]

Chim cum, - - 598. - 30. [46.]

Gai cum, - - 568. - 35. [47.]

dynoſtia *Chin*, poſt 35. *Gai cum* annum aut potius eo ipſo *mie*, *deleta eſt.*

Hoei cum eam reſtituit - 529. - 24. [48.]

Hai cum, - - 505. - 4. [49.]

Min cum. - - 501. - — [50.]

In eius 21. anno deſinit in *Chūn çieu.*

IX. *Ki.* Eius dynaſtiae reguli dicti *Cum.* [51.]

Vu cum. Eius 29. annus congruit cum anno primo *Yn cum* reguli in *Lu*: annus 47. quo obiit, conuenit cum A. ante C. N. 704. [52.]

Tabula XVII Figura 53.

	Cím cūm,	ab A. ante C. N.	703.	annos	23.
[54.]	*Cūm cūm*,	- -	680.	-	8.
[55.]	*Hoei cūm*,	- -	672.	-	18.
[56.]	*Chim cūm*,	- -	654.	-	18.
[57.]	*Huòn cūm*,	- -	636.	-	70.
[58.]	*Hiao cūm*,	- -	566.	-	17.
[59.]	*Ven cūm*,	- -	549.	-	14.
[60.]	*Pim cūm*,	- -	535.	-	18.
[61.]	*Tào cūm*,	- -	517.	-	12.
[62.]	*Hì cūm*,	- -	505.	-	19.
[63.]	*Mìn cūm*,	- -	486.	-	—

Eius in anno 6. desinit *Chūn çicu.*

[64.] X. *Súm.* Eius dynastiae reguli dicti sunt *Cūm.*

[65.] [66.] *Mò cūm.* Sed ipso in Confucio (*m*) vocatur *Hò*, vel *Hô.* Quem vero errorem vel typi, vel potius euanidae veteri in cortice litterae esse opinor: nam paullo post etiam in Confucio *Mò cūm* reperio. Eius 7. annus congruit cum anno primo *Tn cūm* in *Lù*: Annus eiusdem postremus cum A. ante C. N. 720.

[67.] [68.] *Chuam* { *cūm*, ab A. ante C. N. 719. annos 10. / *cūm*, - - 709. - 18.

Mìn

(m) Lib. II. p. 13.

Min cūm, - - 691. - 10. Tabula XVII Figura 69.
occiſus eſt.
Huôn cūm, - - 681. - 31. [70.]
Siām cūm, - - 650. - 8. [71.]
Ab hoc 8. anno nullam interpres Sinicus mentionem facit regulorum *Súm*, neque cauſſam, vt ſolet, in tabulis poſuit.
Chim cūm, - - 636. - 17. [72.]
Chao cūm, - - 619. - 9. [73.]
occiſus eſt.
Ven cūm, - - 610. - 22. [74.]
Cūm cūm, - - 588. - 13. [75.]
Pim cūm, - - 575. - 44. [76.]
Tven cūm, - - 531. - 15. [77.]
Kìm cūm, - - 516. - — [78.]
Illius in anno 36. deſinit *Chūn çiēu.*

XI. *Çìn*, eius dynaſtiae reguli dicti ſunt *Cūm.* [79.]
Ven cūm. Eius 44. annus congruit cum anno primo *Tn cūm* in *Lù*: 50. qui vltimus eius fuit, cum A. ante C. N. 716. [80.]
Nym cūm, ab A. ante C. N. 715. annos 12. [81.]
Cho çu, - - 703. - 6. [82.]
Vu cūm, - - 697. - 20. [83.]
Te cūm, - - 677. - 2. [84.]
Sivēn cūm, - - 675. - 12. [85.]

Tabula XVII Figura 86.

Chim cum, - - 663. - 4.

[87.] *Mo cum*, - - 659. - 39.

[88.] *Cam cum*, - - 620. - 12.

[89.] *Cum cum*, - - 608. - 4.

[90.] *Hûon cum*, - - 604. - 28.

[91.] *Kim cum*, - - 576. - 40.

[92.] *Ngai cum*, - - 536. - 36.

[93.] *Hóei cum*, - - 500. - 9.

[94.] *Taó cum*, - - 491. - —

In eius anno 11. definit *Chun çieu*.

[95.] XII. *Çù*. Eius reguli ausi sunt sese nuncupare *Vam*, quemadmodum ipsi Imperatores.

[96.] *Vu Vam*. Eius 19. annus cum anno primo *Tn cum*, in *Lù* congruit: annus 51. quo obiit, cum A. ante C. N. 690.

[97. 98.] *Ven* { *Vam*, ab A. ante C. N. 689. annos 15.
Vam, - - 674. - 3.

[99.] *Chim vam*, - - 671. - 46.
occisus est.

[100.] *Mo vam*, - - 625. - 12.

[101.] *Chuam vam*, - - 613. - 23.

[102.] *Cum vam*, - - 590. - 31.

[103. 104.] *Cam vam*, { - - 559. - 15.
- - 544. - 4.

[105.] *Lim vam*, - - 540. - 12.
occisus est.

Pim

Pim vam,	-	-	528.	-	13.	Tabula XVII Figura 106.
Chao vam,	-	-	515.	-	27.	[107.]
Hóei vam,	-	-	488.	-	—	[108.]

Eius vin anno 8. *Chūn çieu* definit.

Hoc rerum ſtatu, non potuerunt Imperatores vel factiones tollere, vel vniuerſos regulos, praeciu⁾ potentiores ad obſequium adigere, donec dynaſtia *Cheu* exſtincta fuit et quarta *Çin*, ſucceſſit. Hae eſt orta ex [109.] dynaſtia, quam vndecimo loco poſui, et quae priſtinum nomen retinuit in Imperatoria domo. Anno ante C. N. 478. dynaſtia *Chin*, quam octauo loco commemoraui, a regulo *Çù* euerſa eſt, poſtquam per annos 645 quatuor et viginti principes ex ſucceſſione habuerat. Annis admodum quinque poſt, regnum *ù*, quod 650 annis ſub 20 regulis fuerat, a regulo *Tsĕ* ſubuerſum eſt. Sed in primis ab anno ante C. N. 425 atrocius incendium coortum eſt, quod bellum trecentos admodum annos ſumma vi geſtum fuit. Haec epocha a Sinis *Chen qvĕ*, *bellantia regna*, dicitur. [110.] Tum euerſa ſunt, A. ante C. N. 376 regnum *Çín*, quod tertio loco poſui, cum annos 741 ſub 38 principibus fuiſſet; anno poſt regnum *Chim*, ordine noſtro ſextum, quod intra annos 432 dynaſtis 23 ſubiectum fuerat: anno 286 regnum *Súm*, quod ab annis 381 dynaſtas 32 habuerat: eodem fere tempore regnum *Lù*, quod 34 regulos numerauerat et regnum *Gvéy*, quod 37 principes ex ſucceſſione habuerat. Potentiſſimi

ex ceterorum oppreſſione euaſerant, reguli dynaſtiae *Çi*, in noſtra recenſione ſecundo loco poſitae et dynaſtiae *Çin*, quae denique ſub *Hiao Ven Vam* A. ante C. N. 249. Imperatoria familia *Cheu* deleta, ſummo imperio potita eſt. Tres tantummodo dies felicitati ſuae ſuperfuit *Hiao Ven Vam*. Ei filius *Chuam ſiam vam* ſucceſſit, qui 37 eius domus fuit. Tertio anno poſt etiam is, extremus familiae *Çin* fato functus, haeredem imperii ex adoptione reliquit *Xi Hoam Ty*. Hic intra annos 37 quos regnauit, regulis *Hân*, *Gvéy*, *Çû*, *Tsēn*, *Chao*, *Çi*, qui ſoli, vel ex ſucceſſione, vel reſtitutis poſtliminio dynaſtiis ſupererant, penitus de medio ſuſtulit, ſtatumque imperii, dynaſtiarum et nomine et dignitate conditioneque reliqua abrogatis, reformauit, vt 36 prouinciae ſub abſoluta monarchia praefectos ſuos deinceps acciperent.

Nunc inoffenſo pede ad librum *Chūn çieu*, qui earum rerum partem aliquam attigit, accedere poſſumus. Libri illius duas editiones ad manum habeo. Vna in bibliotheca Auguſta exſtat, forma maiori, *Vam Lie* Imperatore, anno 33. cycli LXXII. ſeu A. C. 1596 ſeptimo anni menſe impreſſa, ſine officinae nomine. Alteram editionem minori forma dono R. P. Dominici Par-

Tabula XVII Figura III. renini poſſideo, ex officina *Qvēy pie* ad omnem vſum accommodatiorem. Itaque de hac potiſſimum dicemus. Totus liber annos complectitur 242 inde ab A. ante C. N. 722. ad verem anni ante C. N. 481. Mea editio octo codicillis conſtat et in triginta *kiven* ſeu libros diuiſa

uiſa eſt: altera vno in codicillo in quatuor tantummodo *kiven* diſpertita eſt. Natus fuerat Confucius in regno *Lù* A. 47. cycli XXXVI. ante C. N. 551. obiit 480 anno ante C. N. vno poſt finitum librum *Chūn çieu.* In eodem regno *Lù* magiſtratum geſſit, quo ſe 55. aetatis anno abdicauit. Fuit igitur eadem aetate, qua apud Graecos Solon, Theognides, Thales Mileſius, Anaximander, Anaximenes et ex hiſtoricis Pherecydes, ſed ita vt omnibus iis minor eſſet natu, aequalis fere Pythagorae et Democrito. Illius item vitae temporibus Iudaei ex Babylone redierunt et Coss. Romani regibus vrbe pulſis rem publicam adminiſtrarunt. Quae ea cauſſa commemoranda duxi, vt, qui tam reliquo in orbe ſapientiae fuerit cultus, quae memoriarum veterum prodendarum ſtudia vigueriut, cum Confucius ſuo in orbe illa exerceret, ſimul hoc loco recordaremur. Sed cum Confucii vita iis annis circumſcribatur, vt principium libri centum annis et ſeptuaginta ante eum annum quo natus eſt, exordiatur, iam per ſe quisque ſentiet, eum quae ante ſe ſeque puero, adoleſcente, fortaſſis et iuuene geſta fuerunt, aliunde repetiiſſe. Itaque mihi videtur aliquis qui in regno *Lù* magiſtratum geſſerit, a primo anno *Tǹ cūm*, reguli in *Lù* hoc negotium conſignandi res ſuae aetatis ſuſcepiſſe, hos vero commentarios alii deinceps videntur continuaſſe, donec Confucius eosdem nactus paene ad exitum vitae ſuae perduxit. In regno *Lù* auctores libri exſtitiſſe conieci, quod ante omnes dynaſtias praecipuus ab iis huic regno honor eſt habitus, quod ex tota diſpoſitione libri, de qua poſtea dicam, obſcurum eſſe non poteſt.

Et

Et retinuiſſe Confucium ſuperiorum auctorum ipſa verba, vno ex loco demonſtrabo. Ad octauum annum Ỳn cūm, id eſt, ad A. ante C. N. annis ante Confucium natum amplius centum et ſexaginta, ſic eſt in Chūn çieu relatum (n):

Tabula XVII Figura 112.

Chūn.	*Vere.*
San	*Tertio*
Ỳve.	*menſe.*
Chím	*Dynaſtiae* Chím
pě	*ducis*
ſú	*miniſter*
Ỳvēn	*nomine* Ỳven (o)
lây	*venit*
qvēy	*et recepit ſe*
Fām.	*in* Fām (p).
kèm ^ yn.	*die 27 cycli dierum ſexagenarii.*
Ngo	*Ego*
gě	*profectus ſum*
Fām.	*in* Fām.

In diſpoſitione totius operis, nullum cycli vel annorum vel menſium veſtigium reperitur, quod cum etiam in

(n) Lib. III. p. 1. (o) Addit commentator *ta fu*, ſeu ex maioribus magiſtratibus cum fuiſſe. (p) Commentator: Fām dynaſtiae Chím oppidum fuit.

in ceteris *Kīm* obſeruauerim, reticere me propter veterem Sinici populi chronologiam non oportet. Neque hic ſecundum Imperatorum, ſed ſecundum regulorum in *Lù* annos digeſtus eſt liber. Et quamquam complures *Cūm*, ſeu reguli aequali dignitate fuerunt, tamen quotiescumque ſine dynaſtiae nomine *Cūm* dicitur, regulum *Lù* dici apparet. Hoc eſt, quod dixi, me mouere, vt credam, auctorem primum huius libri ceterosque deinceps, ita vt ipſum Confucium ex hoc regno fuiſſe ortos atque in eodem magiſtratus geſſiſſe. Imperatoris cuiusdam nomen nusquam toto in libro occurrit. Si qua vel mortis eius vel alia cauſſa, Imperatoris mentio incidat, tantum ſine nominē certo *Tiĕn Vàm*, *Caeli* vel *Caeleſtis Rex* dicitur, quod modeſtiae cauſſa factum videtur, vt adhuc apud Sinos fieri aſſolet. Cum autem de eo ſermo incidit, peculiaria ſaepenumero vocabula adhibentur. Soli Imperatores dicuntur *pūm*, cum *mortui* fuerint. Vt ad 15. annum *Hùon cūm* reguli in *Lu*, cum de morte *Huôn Vàn* Imperatoris refertur, ita proditum eſt (q): *ſan ỳe, ỳe vì, tien vam pūm*: *tertio menſe, ỳe vì ſeu* 32. *die cycli ſexagenarii, Caeleſtis Rex obiit.* De ceterorum regulorum morte quoties proditur, alia et littera et vox eſt. Nam reguli dicuntur *būm*, qui magiſtratus minores geſſerant, ç) ſcilicet hoc item vt alia eiusmodi, ad priſcas gentis caeremonias pertinet, cum is honor Imperatoribus haberetur, vt de iis aliter loquerentur, quam vel de ceteris in dignitate viris, vel de priuatis.

Tab XVII. Figura 113.

[114] [115.] [116.]

(q) Lib. VI. p. 8.

Anni deinde regum *Lù*, si non ita pauci sint, iterum in *Xam*, *priores*, *chum*, *medios* et *hia*, *postremos* diuiduntur, annorum numeris et recensione, non interrupta serie procedentibus. Interpres Sinus mea in editione minoribus litteris et Imperatorum dynastarumque nomina et singulorum annos et anni eiusdem ex cyclo sexagenario appellationem subiecit. Quamuis mea in editione numeri passim vitiose sint exarati, tamen errores ex successionibus perpetuis facile possunt animaduerti. Hinc cognouimus, primum annum *Tŝn cum* in *Lu*, cum 49.

Tab. XVII. Figura 117. anno *Pim Vam* Imperatoris et cum 56 anno Cycli XXXIII. componendum esse, vnde in calculo annus ante C. N. 722. exiit, quem tamquam verum recipimus, licet chronologia Sinica nondum satis excussa sit. Nam cum cyclus annorum et mensium sexagenarius Confucii aetate fuerit nullus, quidquid aliquot post seculis eruditi chronologi sub dynastia *Hia*, ex regum successione, dierum cyclo, eclipsibus, forte et tabulariis publicis in tanta monumentorum clade, hic effecerunt in cyclo annorum superioris aeui, non maiorem firmitatem habere potest, quam vel Fabii Pictoris, vel Catonis, vel Terentii Varronis in A. V. C. regibus, consulibus, praetoribus disponendis impensa sedulo opera. Tametsi enim in his chronologiae Romanae triumuiris, diuersitas, quae inter eos intercedit et aliorum dissensio, falli eorum vnumquemque potuisse, non plane demonstraret, tamen infinita sunt ab eruditis nostra memoria superiorique seculo retecta et proposita, ex quibus eorum errores redarguantur. Vnusquisque annus cuiuscumque reguli a primo die veris recensetur, solidus-

lidusque ad eundem pertinet, quacumque anni parte decesserit. *Chao cūm* reguli in *Lu* initia ponuntur in vere, cum initio anni ante C. N. 541. Et sic Confucius ipse (*r*): *Chūn, vam chim yve, Cūm cie gvey Vere, Imperatorio primo mense, Regulus auspicatus est regnum.* Attamen Confucius (*s*) superiori libro, de *Siam cum* patre huius *Chao cūm*, dixerat: *Tūm, xe yve, qvei yeu çam ngo kiūn Siām cūm. Hyeme, decimo mense, qvei yeu* Tab. XVII. Figura 118. *sive* 10. *die cycli sexagenarii sepultus est noster venerabilis regulus* (*quem proceres et populus venerati sunt*) *Siām cūm.* Hoc ipsum in tota Chronologia Philippi Coupleti ab vnoquoque haud aegre animaduerti poterit. Nescio an hoc seculo aliquid in eo sit mutatum, aut an haecce ratio non ex more recepta fuerit a chronologis, sed compendii caussa aut per inaduertentiam. Nam cum calendarium A. 1723. iam esset excusum typis inscriptumque *Ta Cim Kam Hi lo xe eulh nien, Magnae dynastiae Çim Kam Hi Imperatoris* 62 *anno*, Imperatore eo anno defuncto, meo in exemplari penicillo adscriptum fuit *lo xe eulh nien, cie gvey Tum chim yven nien*, 62 *anno* [119.] scilicet *Kam Hi* Imperatoris, *ineuntis imperii Ium Chim primo anno.* Calendarium proximi 1724. anni iam typis exprimit eiusdem *Tum chim* secundum annum.

Annis illum in modum ordinatis, vnumquemque auctores libri in quatuor tempestates, *verem*, *aestatem*, *autumnum* et *hiemem* dispescuerunt, quae tempora vbique

(*r*) Lib. XXIV. p. 2. (*s*) Lib. XXIII. p. 10.

primo loco ponuntur. Sic Thucydides annos belli Peloponenſiaci ſecundum aeſtatem atque hiemem diſtribuit, γέγραπται δ' ἑξῆς ὡς ἑκαστα ἐγιγνετο καὶ θέρος ᾗ χαμῶνα. Nihil igitur vero eſt ſimilius, quam *Chūn çieu*, id eſt, *Verem* et *autumnum* librum dictum fuiſſe a duabus ex his tempeſtatibus, vt, ſi Thucydidis hiſtoria inſcriberetur θέρος ᾗ χαμών. Nam quae *Philippus Coupletus* de hoc nomine ſenſit (*t*), ea ſunt quidem mihi, ὡς ἐν αἰνιγμασι. *Titulum operis ſui*, inquit, *petiuit ab vere et autumno, propterea quod cum virtute ſapientiaque Principis efflorescat amoeniſſimi veris inſtar respublica, vti e contrario cum eiusdem ſtultitia et improbitate, ceu autumnali caelo frondes ac flores diffluere totam, marceſcere et conſeneſcentis inſtar, tandem emori neceſſe eſt.* Illa quidem argute eleganterque dicta ſi cui magis allubeſcent, quum mea haec opinio, non pugnabo: nam mea me delectat ſimplicitas. Menſes deinde ſubiecti ſunt ſingulis auctumnitatibus quaterni, ſic vero, vt numeri menſium vsque ad duodecimum procedant, neque ex cyclo ſexagenario deſignentur. Dicuntur *chim yve*, *eulh yve*, *ſun yve* et *xe*
Tab. XVII. Figura 120. *yve*, *decimus menſis*, deinde *xe yéu yĕ yve*, *decimus et primus menſis* et *xe yéu eulh yve*, *decimus atque ſecundus menſis*. Primus veris menſis ſemper nuncupatur *Vām*
[121.] *chim yve*, *Imperatorius primus menſis*. At ſi forte ille non exſtet, alter ſimiliter *Vam eulh yve*, *Imperatorius ſecundus menſis*, et ſi hic quoque deſit, tertius vocitatur *Vam ſan yve*. Hoc enim Imperatorum honori tributum fuit, vt qui *Tiēn Vām*, *Caeli reges* viderentur eſſe. Bis occur-

(*t*) In proëmiali declaratione p. 19.

occurrit *Jun yue*, *intercalaris menſis*, A. 37. cycli XXXV. hieme, poſt decimum menſem et A. 48. cycli XXXVII. etiam hieme. Sed neque autumnitates illae, neque menſes ponuntur, niſi ſi quid memoria dignum annotari oportuerit. Sunt quidem nonnumquam et menſes et menſium quoque dies appoſiti, vacuo deinde ſpatio, ſed hoc lacunam indicat, quam in hiſce fragmentis non ſunt auſi ſupplere interpretes. Hac de re ſic *Martinus Martinius* in Hiſtoria Sinica (*u*): *Sed eorum ſeruandi mirabilem modum reperio. Aiunt enim quandam anum librorum amantem, Confutii Mentiique, nec non aliorum nonnullorum libros diuiſis paginis ad domus parietes agglutinaſſe. Nondum ea tempeſtate papyrus erat in vſu, ſed arborum corticibus ac foliis animi decreta mandabant, vt nunc Indi ſolent. Et quoniam erant e materia ſolida candidaque calce obliti, non difficulter latuere, quoad exſtincta Cina ſtirpe, ab haeredibus vetulae ſunt ex prompti facilique iuris publici. Quamquam aliquot litterae vel tempus vel corticis humentis culpa legentium oculis ſe ſubduxerant, praeſertim in Confucio. Quas litteras licet, quales fuerint aut eſſe debeant, non ignorent, cum tamen illius libros recudunt, eas inſerere non audent, ſed notant in margine. Tanta enim eſt Confucii librorum aeſtimatio, vt aliquid in iis etiam aperte mutilatum emendare nefas putent.* Litteras vetuſtate euanidas vel putredine quas ſciant Sini quales fuerint, tamen non audere reponere, non ita, vt res ſe habet, pronunciatum eſt, verum vt locus daretur argutae ſententiolae, quae iis verbis ſubiicitur, et a nobis, vtpote quae huc non pertineat, praetermiſſa eſt.

Tab. XVII. Figura 122.

(*u*) Lib VI. p. 240. ed. Amſtel. 1659.

Quae cum dico, excusatum vt maxime cupio *Martinum Martinium*. Nam cum, quod mihi constat, ex scheais eius simpliciter planeque scriptis, Monachiensis collegii disertissimi viri, quibus hoc negotium datum fuit, hanc historiam Sinicam magnificentiori elegantiorique cultu instruerent, multum ex remotarum rerum inscientia peccarunt, saepe coniecturas suas et meditata non minus consectati sunt, quam Martinii fidem. Emendatos sub dynastia *Han* Confucii libros fuisse et quantum potuit, industria summa restitutos, ne Sini quidem diffitentur: neque enim religioni sibi duxerunt, quae vera esse recordabantur, ea restituere. At quae quidem lacunae sunt, nihil prorsus inibi meminerant, quid olim fuerit scriptum. Quod autem de margine commemoratur, isthuc profecto *Martino Martinio* numquam potuit scribenti in mentem venire. Monachienses scilicet credebant, Sinicis in libris id posse confieri, quod nobis licet in nostris facere: quippe viri cetera eruditi, earum vero rerum non item scientes, quid dicerent non videbant. Docti Sinorum interpretes bene videntur de Confucio meriti, cum multa eius verbis, subiecerint minoribus exarata litteris, quae lumen obscuritati praeferant: in his vero locis, vbi lacunas esse dixi, etiam interpretes siluerunt vacuaque reliquerunt spatia, quod argumento est, eos iam tum sub dynastia *Han*, cum primum repararentur libri quid olim iisdem in locis fuerit scriptum, ignorauisse.

Reliquum est, vt de diebus quoque dicamus. Et illi non semper quidem, nihilo secius haud raro occurrunt, non nisi cyclo sexagenario notati. Hos dies

cum

cum tempeſtatibus annorum menſibusque, praeſertim intercalaribus et eclipſibus comparatos, forma annorum illo aeuo quae fuerit, patefacere poſſe auctumo, vt mirer, Sinos ipſos, eam formam cognoſci alicunde poſſe, deſperare. Eclipſes ſolares, hae enim ſolae eo in libro locum inueniunt, in prioribus annis minime fuerunt accurate recenſitae. Tum vero ab A. 58. Cycli XXXIII. vsque ad annum 9. Cycli XXXIV. et ab eo anno vsque ad 23. a 23. vsque ad 42. et a 54. vsque ad 3. Cycli XXXV. magnis interuallis occurrunt nullae, ne quid de aliis defectibus dicam, quos deinde aſtronomi ſub dynaſtia *Han* expleuerunt calculi ope. Poſterioribus annis, quibus Confucius manum admouit, maiorem accurationem deprehendo. Dies eclipſium a Philippo Coupleto in Chronologia Sinica praetermiſſi fuerunt, vna quoque eclipſis omiſſa, alia anno non ſuo, errore fortaſſis typi adſcripta fuit. Eam ob cauſſam omnium eclipſium in *Chūn çiēu* catalogum confignaui, quem hic inſerere conſtitueram, niſi deinde egregia doctiſſimi viri, *Antonii Gaubilii* opera (*v*) me ab hoc conſilio, vtpote ſuperuacaneo abſterruiſſet; nam vniuerſas ex *Chūn çiēu* eclipſes exhibuit, interpretum Sinicorum calculos examinauit, ſuos denique ex Europaeis tabulis initos adiecit. Pauca hic bona eius venia monebo. Prima eclipſis in *Chūn çiēu* notata eſt ad 3. annum *Yn Cūm* in *Lù*, qui annus cum A. 58. Cycli XXXIII. et A. ante C. N. 720 conuenit, hunc in modum: *Chūn*, *Vàm eulh yve*, *kì ſú*, *ge yeu xe chi*. *Vere*, *Imperatorio* Tab. XVII. Figura 123.

(*v*) Tom. II. p. 156. Tom. III. p. 235. ſeq.

torio ſecundo menſe (Imperatorius dicitur ſecundus, quod illo anno primus menſis non occurrit) *die dicto kì ſú*, (ſeu die 6. cycli ſexagenarii dierum) *Solis fuit eclipſis.* Altera obſeruata eſt ad A. 9. Cycli XXXIV. ſeu A. ante C. N. 709. aut, vt in *Chūn çīeu* eſt, ad A. 3. *Huôn cūm* in *Lù*, et relata his verbis: *Çīēu, cie yve, gîn xîn,* Tab. XVIII. Figura 1. *ǰ, ge yeu xe chi, kì. Autumno, ſeptimo menſe, die gîn xîn*, (ſeu 9. cycli dierum) *noui unium fuit, ſolis fuit eclipſis, eaque totalis.* R. P. Gaubilius (*x*): *Autumno, primo menſe, primo eius die gîn xîn, eclipſis totalis*, et ex calculo *Him yun lu octauo menſe, eius primo die, gin xîn dicto.* Ipſe denique in calculo ſuo octauum menſem ponit. Ego *ſeptimum menſem* ex duabus editionibus *Chun çīēu* accurate edidi, quidquid deinde eius rei ſit, quamobrem ab eo diſcedatur. Aliquoties deinde etiam R. P. *Gaubilius* adiecit, quotus menſis dies fuerit, qui ex cyclo ſexagenario tantum indicatur in *Chūn çīeu.* Eclipſis A. ante C. N. 481. quam veluti poſtremam ex *Chūn çīeu* ponit, in libro non occurrit. Eclipſis aeſtate contigit: at *Chūn çīeu*, initio veris deſiit. Denique obſeruari velim, nonnumquam ſuperioribus in annis, vt ad Annos ante C. N. 709. 669. 668. 664. 655. 612. 575. 574. 559. 553. nouilunia quoque notari, cum in modum, vt ſupra in ſecunda eclipſi verba propoſui ab A. autem 553. non interrupta ſerie, ad vnamquamque eclipſin, notatur primo loco, *nouiluniuum fuiſſe.* Hoc vero iſtius aetatis rudi-

(*x*) L. c. Tom. III. p. 239. Ib p. 245. pro A. 592. errore typorum eſt 692 quod per ſe quisque facile animadvertet.

ruditatem demonſtrare videtur, cum exiſtimarint, fieri poſſe, vt eclipſis ſolaris etiam contingat alia in phaſi lunae. Experiundi cauſſa, a Confucio diligentius, quam alias, nouilunia ecliptica obſeruata fuerunt, quod quis adeo reprehendat? verum nihil magis ad ſcientiam Aſtronomicam, vel in Confucio vel in vniuerſo illo aeuo requiri oportere ſentio, quam notationem eorum, quae de caelo obſeruata ſint. Iam aſtronomi, qui multis poſt ſeculis fuerunt, eadem in perſuaſione exſtiterunt poſſe eclipſes etiam extrema in phaſi euenire. Itaque in Annalibus paſſim ita occurrit, vt in celebri illa eclipſi *Quanuutiana*, annales *Tum kien* (*y*) habent, *Qvèy hài, hoéi, ge yeu xe chi. Die qvèi hài, poſtrema lunae phaſi, ſolis fuit eclipſis.* Tab. XVIII. Figura 2. Sed hunc errorem eiusque cauſſam, R. P. Gaubilius diligenter copioſeque retexit.

Ita igitur temporum notatio atque diſpoſitio operis ſeſe habet in libro *Chūn çieu*. Sed, ſi res eodem in libro traditas videamus, placere poteſt antiquitatis ſimplicitas, ſapientiam qualemcunque aut lumina orationis, aliaque vel maiora, vel cultiora, fruſtra requiſiueris. Praemiſſa ſunt mea in editione, vt apud nos quoque quibusdam in libris fieri ſolet, ſummorum virorum de *Chūn çieu* teſtimonia, de quibus alias dicam, cum de interpretibus huius libri tractabo. Magnifica iſta ſunt quidem, ſed iudicio ab immenſa magiſtri exiſtimatione corrupto prolata. Scilicet ſunt hi commentarii, quales paſſim apud

(*y*) Lib. XLII. p. 12. b.

nos ciues honesti atque agrestes quoque homines memoriae inuandae caussa consignant, quo die eclipsis animaduersa sit, quo quis principatum adierit, quo sit natus, mortuus, occisus, submersus, sepultus, quo die praelium commissum sit, vel proximus arserit Vcalegon, vel terrae motus exstiterit, aut procella et insolita pluuiae copia, eluuiones, locustae, vredines. Sic prisci Romanorum Graecorumque annales fuerunt, teste *M. Tullio*, cuius locum, tametsi prolixum, non grauabor totum hic ponere (z): *Atqui, ne nostros contemnas, Graeci ipsi sic initio scriptitarunt, vt noster Cato, vt Pictor, vt Piso. Erat enim historia nihil aliud nisi animalium confectio, cuius rei memoriaeque publicae retinendae caussa, ab initio rerum Romanarum vsque ad P. Mucium Pontificem Maximum res omneis singulorum annorum mandabat litteris. Pontifex Maximus efferebatur in album et proponebat tabulam domi, potestas vt esset populo cognoscendi: ii qui etiam nunc annales maxumi nominantur. Hanc similitudinem scribendi multi secuti sunt, qui sine vllis ornamentis monumenta solum temporum, hominum, locorum gestarumque rerum reliquerunt. Itaque qualis apud Graecos Pherecydes* (is Pherecydes, quem supra diximus aetate Confucii fuisse) *Hellanius, Acusilaus fuit aliique permulti: talis noster Cato et Pictor et Piso, qui neque tenent, quibus rebus ornatur oratio, et dum intelligatur quid dicant, vnam dicendi laudem putant esse breuitatem.* Quare id quoque nostrum de *Chin çieu* iudicium oportebit esse, quod, *Sempronius Asellio Numantini* belli scriptor de priscis

(z) De Oratore Lib. II. p. 355.

ſcis Romanorum annalibus tulit (*a*): *annales libri tantum, quod factum quoque anno geſtumue ſit, id demonſtrabant, id eſt, eorum quaſi, qui diarium ſcribunt, quam Graeci* ἐφημεριδα *vocant: nobis non modo ſatis eſſe video, quod factum eſſet, id pronunciare, ſed etiam quo conſilio quaque ratione geſta eſſent demonſtrare. Nam neque alacriores ad rem publicam defendendam, neque ſegniores ad rem perperam faciundam annales libri commouere quidquam poſſunt.* Nunc id agam videlicet, operamque dabo, vt ne quis meo iudicio fidem derogare, contra ea, vt pro ſe quisque, quemadmodum de hoc libro iudicari oporteat, ſtatuere ſecum poſſit. Nam poſtquam bonam eius libri partem Latine conuerti, in quo labore non inficior interpretis Sinos mihi vt maxime adiumento fuiſſe, et exilitas rerum et taedium inanis operae, temporisque fructuoſius collocandi diſpendium, impetum animi mei ſuſtinuit, vt deinde reliquos codices et poſteriores in primis, quos Confucius elaborauit ſic tantummodo euoluerem vt certo conſtare mihi poſſet, quod iam tum ſuſpicabar, ceteros nulla cultura priores antecellere. Igitur ſatis erit, ſi de mea verſione tantum excerpam, quantum lectores mei ad cognitionem et vel ad ſatietatem a me requirent.

Chūn çieu, yuên kivèn, ſeu primus libellus.

Tab. XVIII, Figura 3.

ϒèn Cūn	} ϒèn Cūn, *ſeu,* ϒèn *Reguli in Lu*	
Xam.	*primi anni.*	
ϒven	*Primus*	[4]

(*a*) Apud A. Gellium Lib. IV. Cap. 18.

nien. *annus.*

Tab. XVIII. Figura 5. *Chun.* *Vere.*

[6.] *Vâm* *Imperatoris*
chim *primus*
yve. *menſis.*

Nihil ad hunc menſem annotatum eſt.

[7.] *San* *Tertius*
yve. *menſis.*

[8.] *Cūm* *Regulus, ſcilicet in Lu, nomine* ϒn
kie *et*
Chū *Chu dynaſtiae regulus*
Fù *ϒ fù*
yū *iurarunt ſeu foedus icerunt*
mie. *in Mie.*

Fù, hoc accentu ſcribendum monet Commentarius Sinicus, cum alioqui etiam *fú* pronuncietur. Ex eodem teneo, *Mie*, regionem fuiſſe in *Lu* ſitam. Iurare autem ſolebant priſci mortales in Sinis, epoto animantis ſanguine: animantem defodiebant et ſanguine ſcribebant iuramenti formulam in cortice.

[9.] *Hiá* *Aeſtate*
[10.] *u* *Quintus*
yve. *menſis.*

Chim

Tab. XVIII. Figura 11.

Chîm pe } *Chîm pĕ, ſeu Chîm regni Dux*

kĕ tuón yū } *occupauit particulam*

Ỳèn. *terrae ſeu regionis Ỳèn.*

Scholiaſta Sinus, *Ỳèn* monet hoc accentu legendum eſſe, regionemque in regno *Chîm*

Cieu. *Autumno.* [12.]

Cie *Septimus* [13.]

yve. *menſis.*

Tien Vàm } *Imperatoris (ſcilicet, Pim Vam, nomine)* [14]

ſú *miniſter*

çuì hivèn } *dictus, Çaì hivèn*

lày *venit*

qvēy *et recepit ſe*

Hoéi, *ad Hoéi,*

Cūm *Reguli Ỳn Cūm, in Lu*

chúm *alterum ex tribus*

çu chi } *filium,*

Fúm. *in Fúm.*

Çaì bivèn, proprie ſignificat, *gubernatorem ſeu praefectum magni nominis*, videturque hic titulus honoris magiſtratui cuidam tributus fuiſſe. Ad *Fúm* ſcholiaſta addit: 反鳳方賻 *Fúm, fām fum ſum fān. Fúm, fuit pars Fúm regionis rebellis.*

Tab. XVIII. Figura 15.

kieu *Nonus*
yxe. *menſis.*

[16.] *kie* *Etiam*
Súm *Súm, reguli*
gin *miniſter*
mîm *yū* } *iuratūt*
Siēu. *et Siēu regulus.*

Scholiaſta explicat: *Lu, Súm, Siēu, ſan qxe, cūm gxey mìm. Lu, Súm et Siēu, tria regna, inter ſe foedus icerunt.*

[17] *Tūm.* *Hieme.*

[18.] *xe* *yeu* *eulh* } *duodecimus*
yxe. *menſis.*

[19.] *Çí* *pe* } *Çí pe, ſeu, Çi dynaſtiae Dux*
làỳ *venit.*

Addit

Addit Scholiasta, *y* *Lù*, *f. ad regulum Lù.*

Tab XVIII. Figura 20.

Cūm *Reguli* Yn *cūm in Lù*
çù *Çù, seu, dynasta regionis cuiusdam*
Ye fui *Ye fui, nomine*
ço. *mortuus est.*

Sui, proprie dignitatis nomen. Scholiasta: *Ye fúi*, *Lu* 夫大 *ta fū*, *in regno Lù*, *fuit ex maioribus senatoribus, qui regulo proponere solebant promouendos ad dignitates.*

Eulh *Secundus* [21.]
nien. *annus, scilicet* Yn *Cūm, reguli.*
Chūn. *Vere.* [22.]
Cūm *Regulus Lu* [23.]
hoéi fio yū *amice congressus est cum dynasta Sio,*
Cien. *in Cien.*

Scholiasta: *Sio chi*, 近 *kìn y Lù chè ye. Sio in vicinia regni Lu fuit.* Et, *Cien, Lù ty. Cien* (vbi conuenerunt) *est terra in regno Lu.*

Hia. *Aestate.* [24.]
u *Quintus* [25.]
yve. *mensis.*

Kiù

Tab. XVIII. Figura 26.

Kiù *Kiù, dynaſtae*
gîn *minſter*
ge *adiit*
Hiām. *dynaſtam Hiām, ſ. venit in Hiām.*

Interpres Sinus: *Hiām ſiao qvĕ. Hiām, eſt paruum regnum.* Simul monet, hic ipſum huius regni principem intelligendum eſſe.

Vù *Vû*
Hâi *Hài*
Súi. *Mandarinus fuit.*
Súi *Mandarinus*
gĕ *adiit*
kiĕ. *regionem kiĕ.*

Mandarinos Luſitani vocant omnis generis magiſtratus in Sinis aliisque regnis, non a Luſitanica aliqua voce, vt plerique exiſtimant, ſed a *Malabarico Mándiri, Miniſter*, vt me R. R. Miſſionarii Danici monuerunt (*b*). Eodem nomine hic vtar, tamquam noto. Scholiaſta: *Kiĕ, fù yûm qve. Kiĕ, fuit paruum regnum.*

[27] *Çiēu.* *Autumno.*

[28.] *Pa* *Octauus*
yve. *menſis.*

[29.] *kèm xîn.* } *die, kèm xîn, ſ.* 17. *die cycli ſexagenarii.*

Cūm

(*b*) Epiſtola Scripta Trangambariae 1735. 30. Dec.

Tab XVIII. Figura 30.

Cūm *Dynaſta Lù*

kie *et*

Sio *dynaſta Sio*

mîm *yū* } *foedus iceruut* [31.]

Tam. *in Tam.*

Scholiaſta: *Tam, regio in Lù.*

Kieu *Nonus*

yve. *menſis.*

Kì *Praefectus ki*, (*Ta fu*, fuiſſe Scholiaſta monet)

Ly *ſiū* } *nomine Ly ſiū* [32.]

lây *venit*

Tm *nìu.* } *vt Tm duceret vxorem.*

Scholiaſta docet in *Ly ſiū*, ſecundum characterem *ſiù* pronunciari oportere: nam etiam *tĕû* efferri poteſt.

Tūm. *Hieme.* [33.]

Xe *Decimus* [34.]

yve. *menſis.*

Pe *kì* } *Pe ki* (reguli *Lu* coniux, vt Scholiaſta monet) [35.]

qvēi } *recepit ſe*
yū
Kì *ad Ki praefectum.*

Addit Scholiaſta: 着逆 戶斤 絲需 裂

lie̬ ſiu ſò Ym chè, ſidit ornatum, (neſcio quem,) *muliebrem quem Ym habuit.* Videtur caeremonia indicari, qua regina aut deſpondit virginem et elocauit, aut nouis nuptis honorem exhibuit.

Tab. XVIII. Figura 36.

Ki } *Idem Ly ſiu, in Ki dignitate*
çù
pe *Dux*
kiu } *et dynaſta Kiù*
çù
mîm } *foedus iniuerunt*
yū
Mie̬ *in Mie̬.*

Interpres: *Mie̬* 邑 莒 *kiù ye̬. Mie̬ eſt in dynaſtia Kiu, villa moenibus circumdata.*

[37] *Xe* } *duodecimus*
yeu
eul'h
yve. *menſis.*

[38] *Ye̬* } *die 52. cycli ſexagenarii.*
mào.

[39] *Fū* } *τῦ Fu gin*
gîn

çù

çù xi } *çù xi, (secundus natu filius)*

hum. *mortuus est.*

Scholiasta: *Çù xí,* 也孝仲 *Chum çù yè, filius natu secundus fuit.*

Chim. *Dynastiae Chim.* Tab. XVIII. Figura 40.

gin *populus*

fa *vicit*

Gvéy. *regulum Gvéy.*

San *Tertius* [41.]

nien. *annus reguli Yn cum, in Lù.*

Chun. *Vere.* [42.]

Vam *Imperatorius* [43.]

eulh *secundus*

yve. *mensis.*

kì } *sexto die cycli sexagenarii.*
sú. }

Ge *solis*

yeu *fuit*

xe } *eclipsis.*
chi. }

San *Tertius* Tab XIX. Figura 1.

yve. *mensis.*

Tabula XIX. Figura 2.

Kèm fio } 47. *die cycli ſexagenarii dierum*

[3.] Tiēn Vàm } *Caeli Rex* Imperator, ſc. *Pim Vam.*

pum. *obiit.*

[4.] *Hia.* *Aeſtate.*

[5.] *Sù* *Quartus*

yve. *menſis.*

[6.] Sīn mào. } 28. *die cycli ſexagenarii.*

[7.] Tìm xí, } *Tìm xí,*

çò. *mortuus eſt.*

Interpres: Tiēn çu ta fū. *Imperatoris mandatum ex maioribus magiſtratibus.*

[8.] Çiēu. *Autumno.*

[9.] Vu xí çu } *Vu xí dynaſta, qui,* (teſte Scholiaſta,) *apud Imperatorem, Ta fū, fuit,*

lay *venit,*

kieu *vt ſeu peteret, ſeu exigeret*

fú. *ſumptus ad funus.*

Forte Imperatorium. Nondum enim vacauit interpretis commentarium hoc loco excutere.

[10] *Pa* *Octauus*

yve. *menſis.*

Kèm

Tabula XIX. Figura 11.

Kem xîn } 17. *die cycli ſexagenarii*

Súm *Súm, dynaſtiae* [12.]

Cūm *regulus*

Hô *Hô, nomine*

ço. *mortuus eſt.*

Tum. *Hieme.* [13.]

Xe yeú eulh } *duodecimus* [14.]

yve. *menſis.*

Çî *Çî* [15.]

heù *ethnarcha*

Chîm *et dynaſtiae Chîm*

pe *Dux*

mìm yū } *foedus inierunt*

Xe muen } *in Xe muen.*

Commentarius regionem in regno *Çî*, fuiſſe declarat.

qvèi vî } *die 20. cycli ſexagenarii* [16.]

çaîm *ſepultus eſt* [17.]

ſum *ſum dynaſtiae regulus*

Mo̊ cūm } *Mo̊ cūm.*

Is ipſe, qui paullo ante dicebatur alio charactere *Ho cūm.*

Chūn çieu kiven chi eulh, ſeu ſecundus libellus.

Tabula XIX. Figura 18.

	Tŷ̀n Cūm }	*Tŷ̀n Cūm, reguli in Lu*
	chum.	*media actas.*
[19.]	*Sù*	*Quartus*
	nien.	*annus.*
[20.]	*Chūn,*	*Vere,*
[21.]	*Vâm*	*Imperatoris*
	eulh	*ſecundus*
	yve.	*menſis.*
[22.]	*Kiù*	*Dynaſtiae Kiù*
	gin	*miniſter*
	få	*vicit*
	Kî	*Kî regulum*
	cîu	*occupauitque*
	Mêu lèu. }	*Mêu lèu*

Scholiaſta: *ye*, ſeu villam in regno *Kî* fuiſſe refert.

Vù

Vú
xiñ } 45. *die cycli ſexagenarii* Tabula XIX. Figura 23.

Gvey *Gvéy* regulum (*nomine*, *Hûon Cūm*) [24]

Cheū
hiū } *Cheū hiū*

xí, *occidit*,

kī *qui*

kiūn *partes ſuas perfectè impleuerat*

huôn *et conſeruauerat* (*populum*)

Interpres tradit, eum fuiſſe *Gvéy cūm çu*, *Gvéy reguli dynaſtam.*

Hia *Aeſtate* [25.]

Cūm *Regulus in Lu*, (*Yn Cūm*) [26.]

kie *et*

Sum
Cūm } *regulus in Sum*, (*Chûam cūm*, *nomine*)

yú
yū } *ſine caeremoniis conſuetis conuenerunt*

Cim. *in Cim.*

Scholiaſta: *Cim*, *villa in dynaſtia Gvey.*

Sum
Cūm, } *Sum dynaſtiae regulus*, (*nomine*, *Chûam Cūm*) [27.]

Chin
Heû, } *Chin dynaſtiae etnarcha*, (*nomine*, *Hûon Cūm*)

Çí gîn — Çí dynaſtiae miniſter, (nomine Sivẽn, quo nomine etiam regulus ipſe dicebatur)

Gvéy gîn — et Gvéy dynaſtiae miniſter (ille, Chẽu hiũ, quem ſupra nominauerat)

fa — Superarunt

Chim. — Chim regulum.

Tabula XIX. Figura 28.

Çiẽu. — Autumno.

[29] Hõei ſui, — Hõei ſui,

ſui. — Mandarinus factus eſt.

[30.] Hóei — Congreſſi ſunt

Sum Cum — Sum regulus,

Chîn Heu — Chîn ethnarcha,

Çí gîn — Çí dynaſtiae miniſter,

Gvéy gîn — Gvéy dynaſtiae miniſter,

fa — et ſuperarunt

Chim. — Chim regulum.

[31.] Kieu — Nonus

yve. — menſis.

[32.] Gvéy gin — Gvéy dynaſtiae miniſter

xa

xa̍
Cheū
hiū
yū } *damnauit Chcu hiu*

Po *in Po*

Scholiasta: *Po*, *regio in dynastia Chín.*

Fūm *Hieme.* Tabula XIX. Figura 33.

Xe
yeu
eulh } *duodecimus* [34.]

yve. *mensis.*

Gvéy
gín } *Gvey dynastiae minister* [35.]

lie̍ *firmauit et stabiliuit*

Çin. *Cin dynastiam.*

û *Quintus* [36.]

nien. *annus.*

Chūn. *Vere.* [37.]

Cūm *Regulus Lu*, (*Yǹ Cūm*) [38.]

qvōn
yû
yū } *diligenter inspexit pisces, seu piscaturam*

Tam. *in Tam.*

Scholiasta: *Tam*, *regio in Lu.*

Tabula XIX. Figura 39.

	Hia.	*Aeſtate.*
[40.]	*Sù*	*Quartus*
	yve.	*menſis.*
[41.]	*çam*	*ſepultus eſt*
	Gvéy	*dynaſtiae Gvéy regulus*
	Huôn *Cūm.*	*Huôn cum.*
[42.]	*Çiēu.*	*Autumno.*
[43.]	*Gvéy*	*Gvéy dynaſtiae*
	ſái	*Mandarinus*
	ge	*profectus eſt*
	Chîm.	*in Chîm.*

Scholiaſta: *Chîm, paruum quoddam regnum*

[44.]	*Kieu*	*Nonus*
	yve.	*menſis.*
[45.]	*Lao* *chum* *çu*	*Lao ſecundus natu filius*
	cūm,	*circuiuit domum,*
[46.]	*çō*	*incepit*
	hiēn	*offerre*
	lo	*ſex*
	yù.	*alas auium.*

Videtur vtrumque aliquid ex ritibus Sinicis continere, quod explanandi mihi non eſt data copia.

[47.]	*Chū*	*Chū dynaſtiae*

gîn

gîn *miniſter*
Chím *et Chím dynaſtiae*
gîn *miniſter*
fă *vicerunt*
Sum. *regulum Súm.*
Mim. *Parui vermes, qui ſegetes naſcentes corro-* Tabula XIX. Figura 48.
dere et corrumpere ſolent, (ſcilicet, illo tempore in regno Lu, cladem ſegeti intulerunt.)
Tūm. *Hieme.* [49.]
Xĕ } *duodecimus* [50.]
yéu }
eulh }
yve. *menſis.*
Sīn } *octuodecimo die cycli ſexagenarii* [51.]
ſú. }
Cūm *Reguli in Lu* [52.]
çù *çù, ſeu dynaſta*
Kēu *nomine Kēu*
çŏ. *mortuus eſt.*
Súm *Súm reguli* [53.]
gìn *miniſter*
fă *vicit*
Chím. *regulum Chím*
Gvèy *Venatio fuit*

Cham̂ } apud Cham̂ cŏ
cŏ }

Scholiasta: *Cham̂ cŏ villa in dynastia Chŭn.*

Tabula XIX. Figura 54.

Lo *Sextus*
nien. *annus.*

[55.] *Chūn.* *Vere.*

[56.] *Chŭn* *Reguli Chŭn*
gin *minister*
lay *venit*
Xū } *in Xū pim.*
pim }

[57.] *Hia.* *Aestate.*

Tabula XX. Figura 1.

V *Quintus*
yve. *mensis.*

[2.] *Sīn* } 58. *die cycli sexagenarii.*
yèu. }

[3.] *Cum̄* *Regulus in Lu*
hŏi *amice congressus est*
Çi̊ } *cum etuarcha in Çi̊,*
Hèu, }
mîm } *foedus inierunt*
yū }
y. *in Υ.*

Scholiasta: *Υ regio dynastiae Çi̊*

çīēu

Tabula XX, Figura 4.

ṣiēu. *Autumno.*

cie *Septimus* [5.]

yve *menſis.*

Nihil annotatum eſt.

Tūm *Hieme* [6.]

Sum *Sum reguli* [7.]

gîn *miniſter*

cîu *occupauit*

Chám cŏ } *Chám cŏ.*

Scholiaſta: *Chám cŏ, villa in dynaſtia Chîn.*

cie *Septimus* [8.]

nien. *annus.*

Chūn. *Vere.* [9.]

Vâm *Imperatoris* [10.]

ſan *tertius*

yve. *menſis.*

xŏ kì } *xŏ kì* [11.]

qvēi yū } *recepit ſe ad*

Kì. *Kì.*

Interpres ſcribit, fuiſſe hanc *xŏ kì* 妹 *tý*, *ſororem natu minorem*, reginae *Pĕ kì* de qua item, vt de hoc *Kì*, ſupra dictum eſt.

Tabula XX. Figura 12.

Tém *Dynaſtiae Tém*

hêu *etnarcha*

çŏ. *mortuus eſt.*

[13.] *Hia.* *Aeſtate.*

[14] *Chim* *Moenia ducta vel renouata ſunt*

Chum } *in Chum kieu,*
Kieu }

Interpres: *Chum kieu, villa in regno Lù.*

[15.] *Çì* } *Çì ethnarchae*
heû }

ſu *Mandarinus*

kī

tý

nien

lây *venit*

Pím. *in Pím*

[16.] *Çiēu.* *Autumno.*

[17.] *Cūm* *Regulus in Lù*

ſa *vicit*

Chū. *dynaſtam Chu.*

[18.] *Tūm.* *Hieme.*

Tién

Tabula. XX.
Figura 19.

Tiēn } *Imperatoris*
Vâm }
ſú *miniſter*
fân } *Fân pe praefectus*
pe }
lay *venit*
Pim. *in Pim.*

Interpres: *Fan Pe, terra ſub ditione Imperatoris*

Sio *Sio dynaſta* [20.]
ſa }
Fân }
pe } *vicit Fàn Pe praefectum*
yū }
çu *Çu dynaſta*
kiēu } *in kiēu y*
y }
qvēi. *ſe recepit.*

Chūn çieu kiven chi ſan, ſeu tertius libellus.

Tn } *Tn cūm, reguli in Lu* [21.]
Cūm }
hia *extrema aetas.*
pa *Octauus* [22.]
nien. *annus.*

Chun

Tabula XX. Figura 23.

Chūn. *Vere.*

[24.] Sum / Cūm } *Sūm regulus*

Gvéy / heú } *et Gvéy etnarcha*

yú / yū } *sine caeremoniis conuenerunt*

Chûi. *in Chûi.*

Interpres: Chûi, *regio in regno Gvéy*

[25.] San *Tertius*

yve. *mensis.*

[26.] Chim / pe } *Chim ethnarchae*

fú *Mandarinus*

Yvēn *Yvēn nomine*

lày *venit*

qvēy *et recepit se*

Fām. *in Fām.*

Interpres: Fām *villa in Chim*

[27.] Kèm / yn } *27. die Cycli sexagenarii.*

[28.] Ngo *Ego*

ge *profectus sum*

Fām. *in (eandem villam Fām.)*

Hiá.

Tabula XX. Figura 29.

Hiá. *Aeſtate.*

Lo *Sextus* [30.]

yve. *menſis.*

kì hái. } 36. *die cycli ſexagenarii.* [31.]

Çí *Çí* [32.]

hèu *ethnarcha*

lào fù } *venerabilis ſenex*

ço. *mortuus eſt*

Interpres monet, ſermonem eſſe de *Sivēn cūm*, regulo in *Çí*.

Sīn hái } 48. *die cycli ſexagenarii.* [33.]

Siéu Nàn } *Siéu dynaſtiae praeſes* [34.]

ço. *mortuus eſt.*

Çiēu. *Autumno.* [35.]

Cie *Septimus* [36.]

yve. *menſis.*

Kèm ù. } *ſeptimo die cycli ſexagenarii,* [37.]

Súm cūm, } *Súm regulus,* [38.]

Çí hèu } *et Çì ethnarcha*

Gvéy hêu } *et Gvéy ethnarcha*

mîm yū } *coniurarunt*

Và vo. } *in Và vo*

Interpres: *Và vo, in regno Chēu*

Tabula XX. Figura 39. *Pa* *Octauus*

yve. *menſis.*

[40.] *çaū* *ſepultus eſt*

Çi *Çi dynaſtiae regulus*

Sivēn Cūm. } *Sivēn cūm nomine.*

[41.] *Kieu* *Nonus.*

yve. *menſis.*

[42.] *Sīn nao.* } *28. die cycli ſexagenarii.*

[43.] *Cūm* *Regulus in Là*

kie *et*

Kiù gîn } *Kiù dynaſtiae miniſter*

mîm yū } *coniurarunt*

Feû lày } *in Fêu lày*

Interpres: *Fêu lày, villa in regno Kiù.*

Mim

Tabula XX. Figura 44.

Mîm.	*Vermes ſegetem naſcentem corroderunt.*	
Tūm	*Hieme.*	[45.]
xe *yeu* *eulh*	*duodecimus*	[46.]
yve.	*menſis.*	
Vū *Hiái*	*Vu Hiái*	[47.]
ço.	*mortuus eſt.*	
Kieu	*Nonus*	[48.]
nien.	*annus.*	
Chūn.	*Vere.*	[49.]
Tiēn *Vam*	*Imperatoris*	[50.]
ſù	*miniſter*	
Nàn *ki*	*nomine Nan ki*	
lây	*venit.*	
Pîm.	*in Pim.*	
San	*Tertius*	[51.]
yve.	*menſis.*	
qvèi *yèu*	*die 10. cycli ſexagenarii*	[52.]
Ta	*Magna*	[53.]
Yú	*pluuia*	

ſivè *et nix.*

Tabula XX. Figura 54. *Hiè* *Hiè*

ço. *mortuus eſt.*

Interpres: *Hiè, reguli in Lù, ta ſu.*

[55.] *Hia.* *Aeſtate.*

[56.] *Chim* *Moenia ducta ſunt*

Lâm. *circa Lâm*

Interpres: *Lâm, villa in Lu.*

[57.] *Çiēu.* *Autumno.*

[58.] *Cie* *Septimus*

yve. *menſis.*

Nihil additur.

[59.] *Tūm.* *Hieme.*

[60.] *Cūm* *Regulus Lu*

hoéi } *amice congreſſus eſt*

Çî }

heû } *cum Çî ethnarcha*

yū }

Kém *in Kém*

Interpres: *Kém terra in dynaſtia Sum.*

Fig: 1.

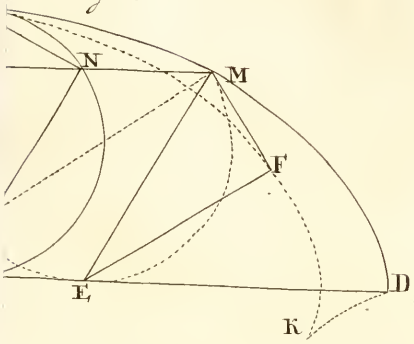


Fig: 2.

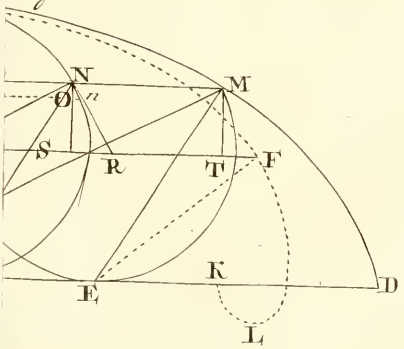


Fig. 1.

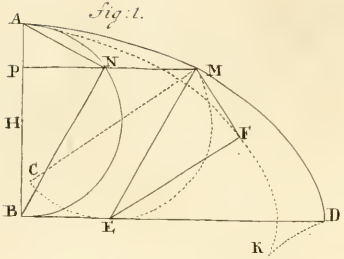
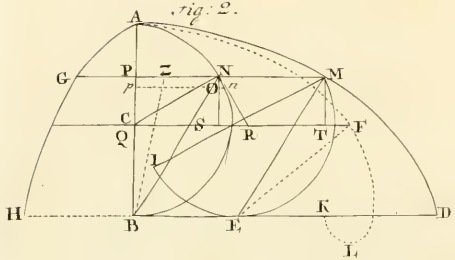


Fig. 2.



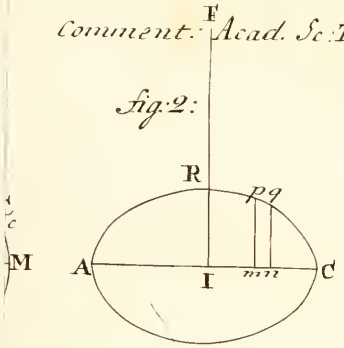


fig. 2.

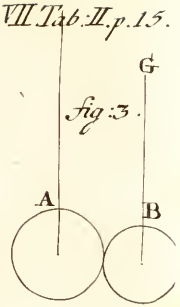


fig. 3.

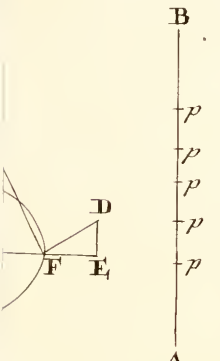


fig. 5.

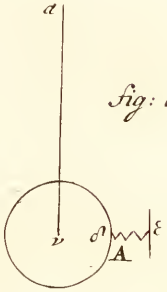


fig. 6.

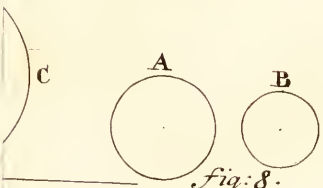


fig. 8.

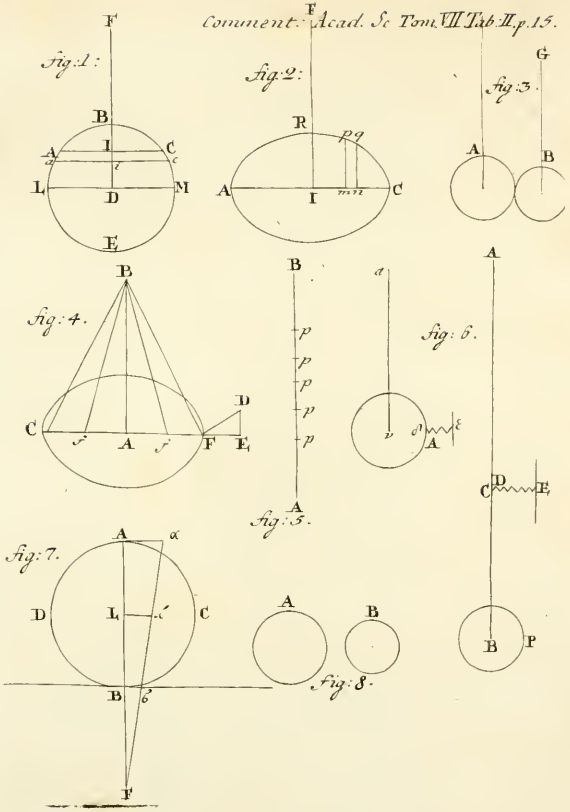


Fig. 1.
F
B
A
I
C
a
i
c
L
D
M
E
Fig. 2.
F
R
p q
A
I
C
m n
Fig. 3.
G
A
B
Fig. 4.
B
C
D
A
F
E
Fig. 5.
B
p
p
p
p
p
A
Fig. 6.
a
v
δ
ε
A
A
C
D
E
Fig. 7.
A
α
D
L
C
B
δ
F
Fig. 8.
A
B
B
P

fig. 2.

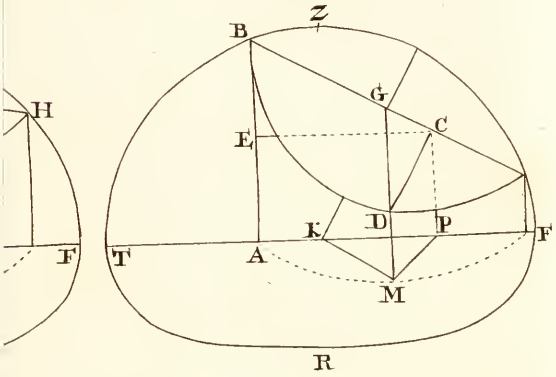


fig. 3.

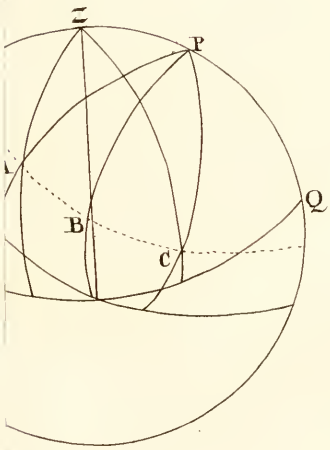


fig. 1.

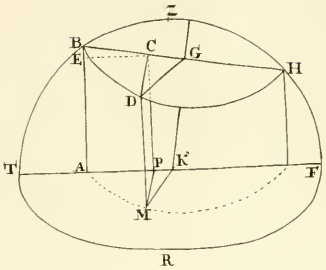


fig. 2.

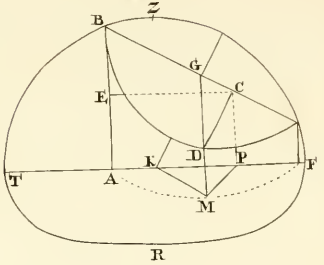


fig. 3.

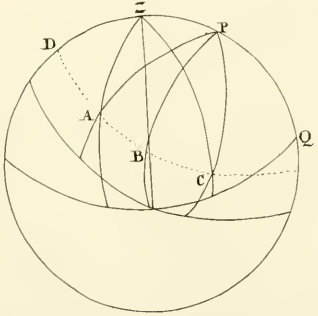


fig: 1.

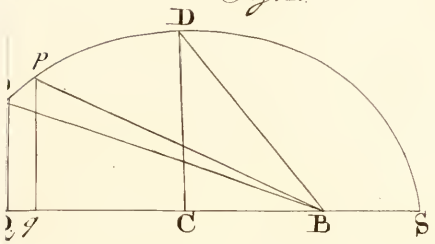


fig: 2

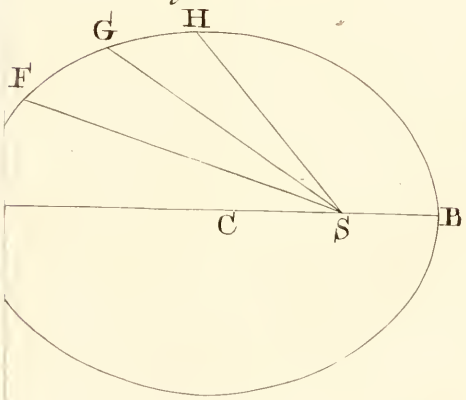


fig: 1.

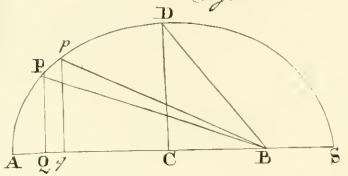
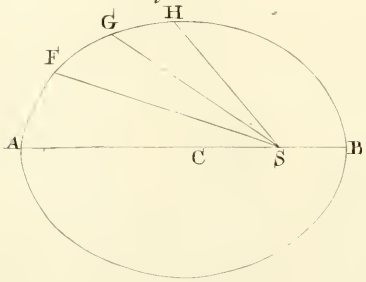


fig: 2



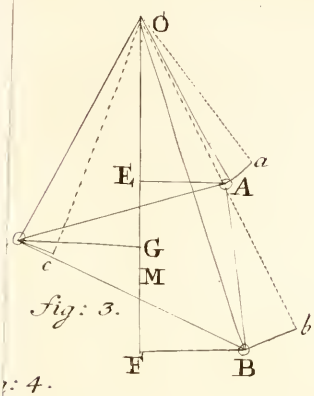


fig: 3.

: 4.

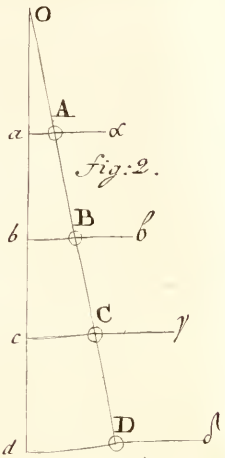


fig: 2.

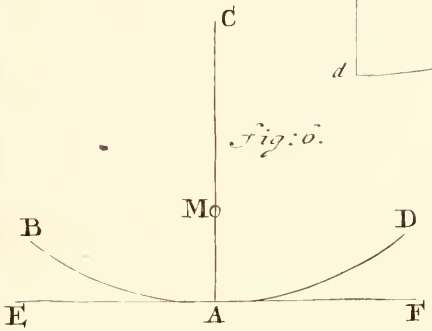


fig: 6.

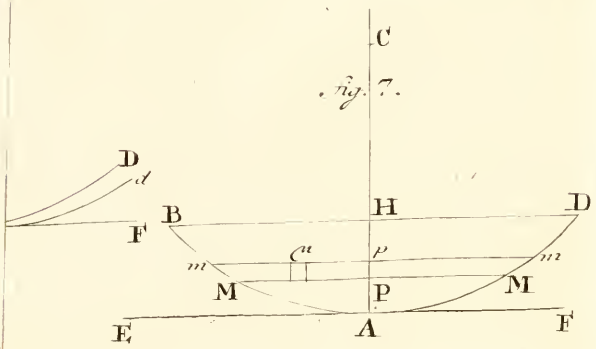
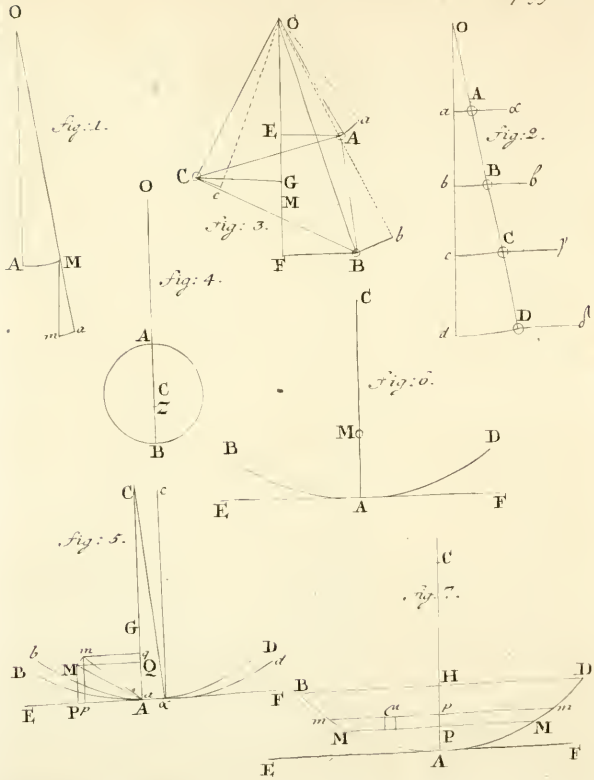
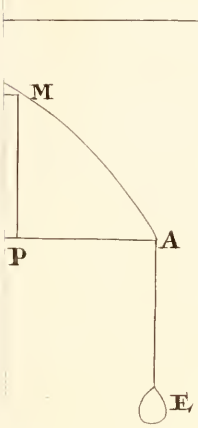


fig. 7.


O
fig: 1.
A
M
m
a
O
a
E
A
C
G
c
M
fig: 3.
b
F
B
O
fig: 4.
A
C
Z
B
O
A
a
α
fig: 2.
B
b
β
C
c
γ
D
d
δ
C
fig: 6.
M
B
D
E
A
F
C
c
fig: 5.
G
B
b
m
M
Q
D
d
E
P
P
A
a
F
C
fig: 7.
H
B
D
m
a
p
m
M
P
M
E
A
F

8.



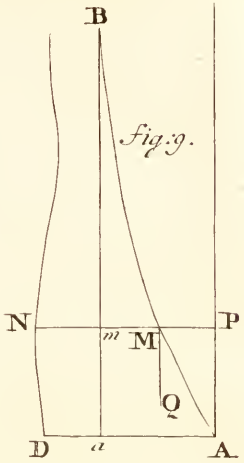


Fig: 9.

Fig: 11.

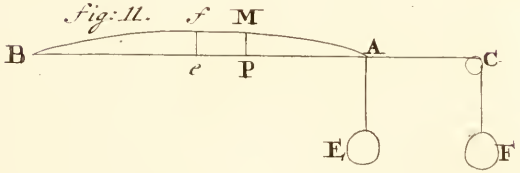


Fig: 12

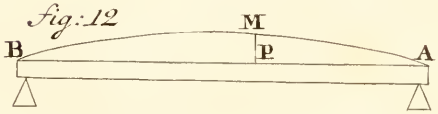
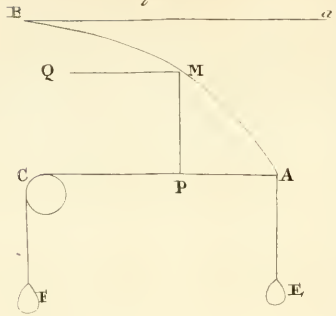
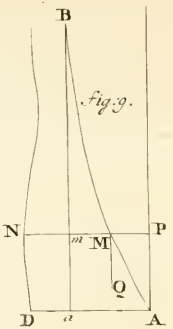
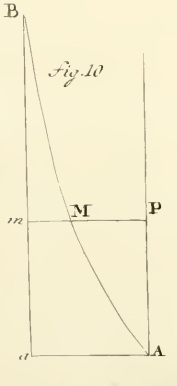


Fig: 8.


B
a
Q
M
C
P
A
F
E


B
Fig: 9.
N
m
M
P
Q
D
a
A


B
Fig. 10
m
M
P
a
A

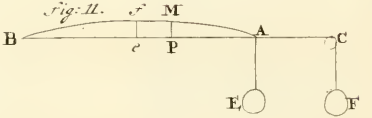


Fig: 11.
B
e
M
P
A
C
E
F

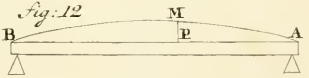
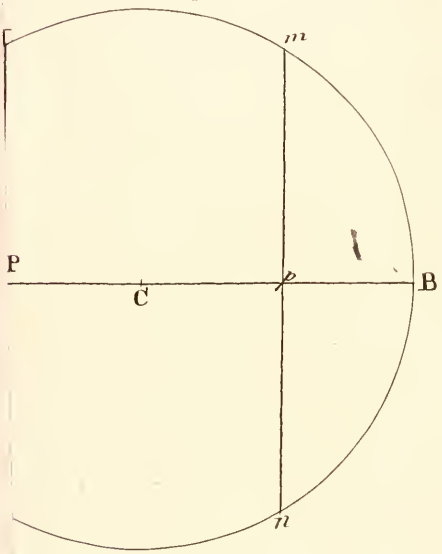
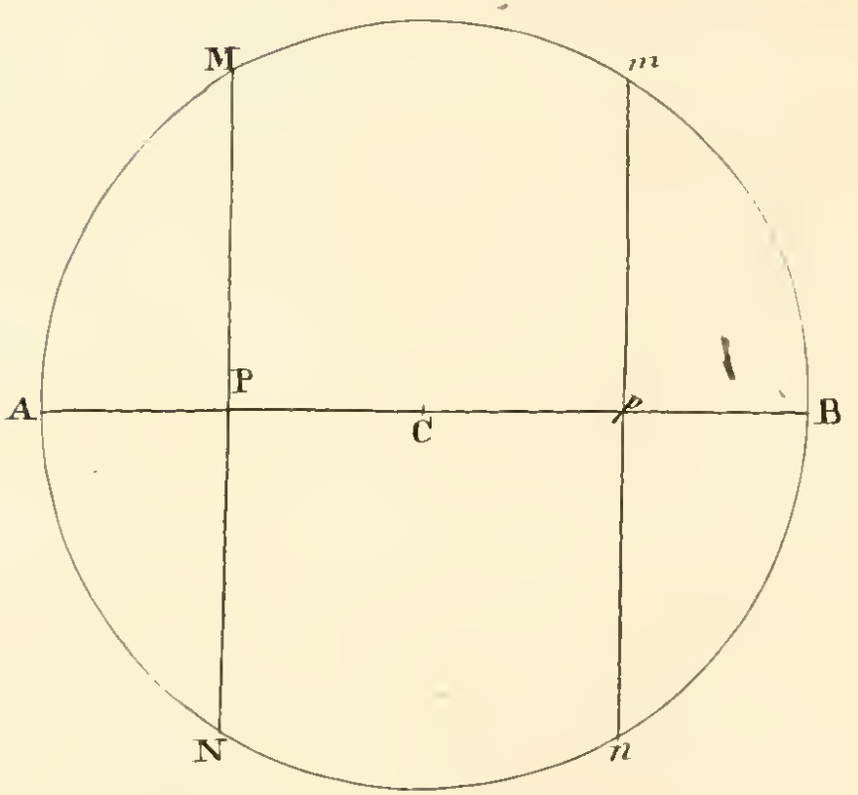


Fig: 12
M
B
P
A


m
P
C
p
B
n


M
m
P
p
A
C
B
N
n

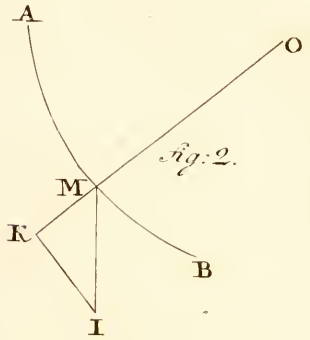


fig: 2.

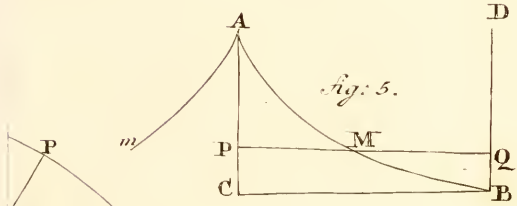


fig: 3.

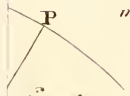


fig: 4.

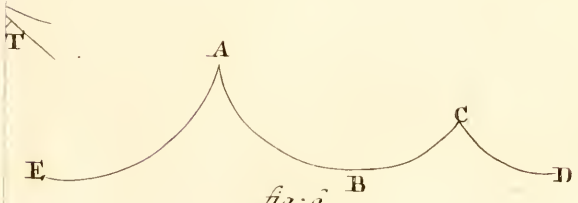


fig: 6.

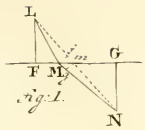


fig: 1.

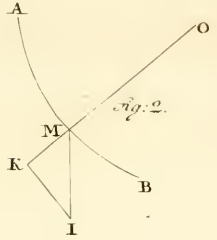


fig: 2.

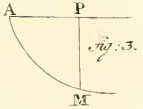


fig: 3.

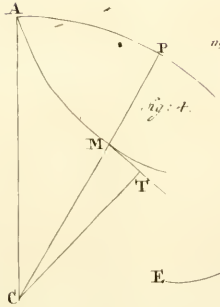


fig: 4.

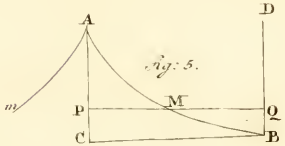


fig: 5.

fig: 6.

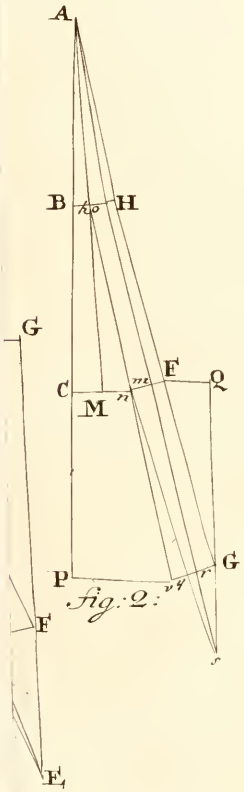


Fig. 2.

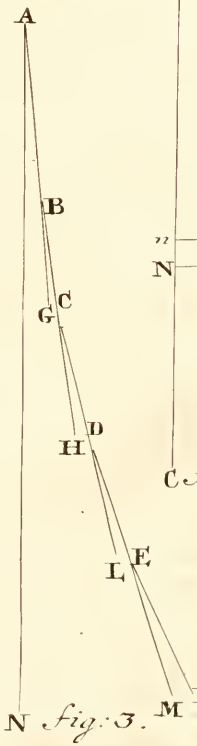


Fig. 3.

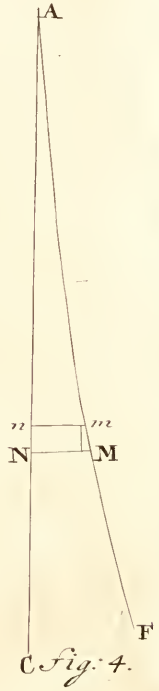
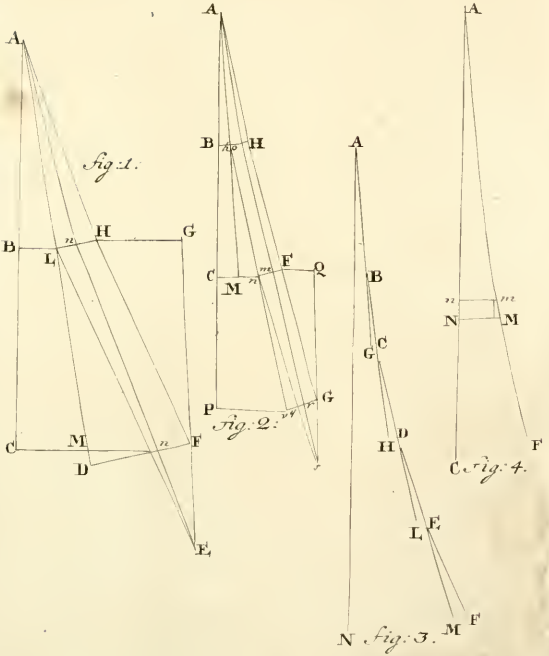
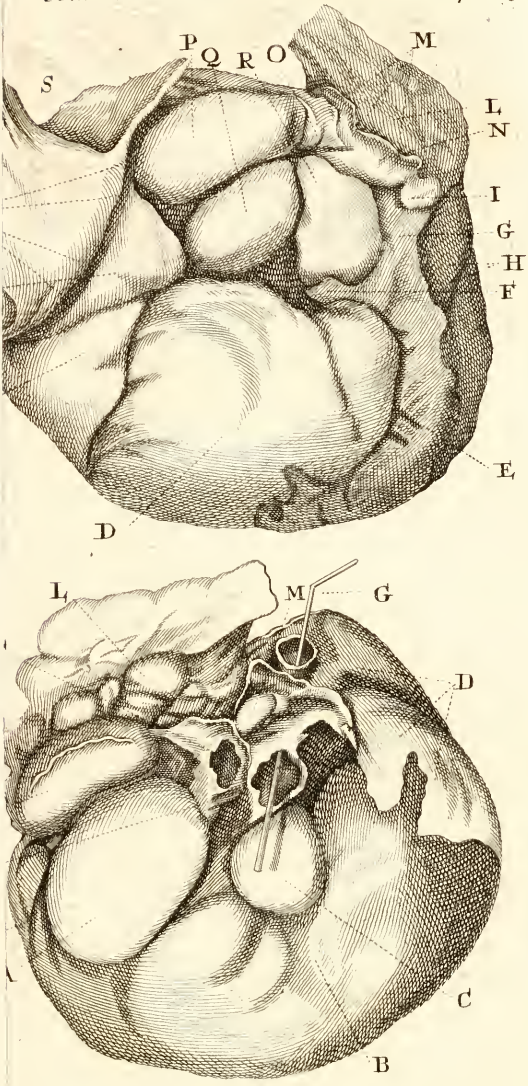
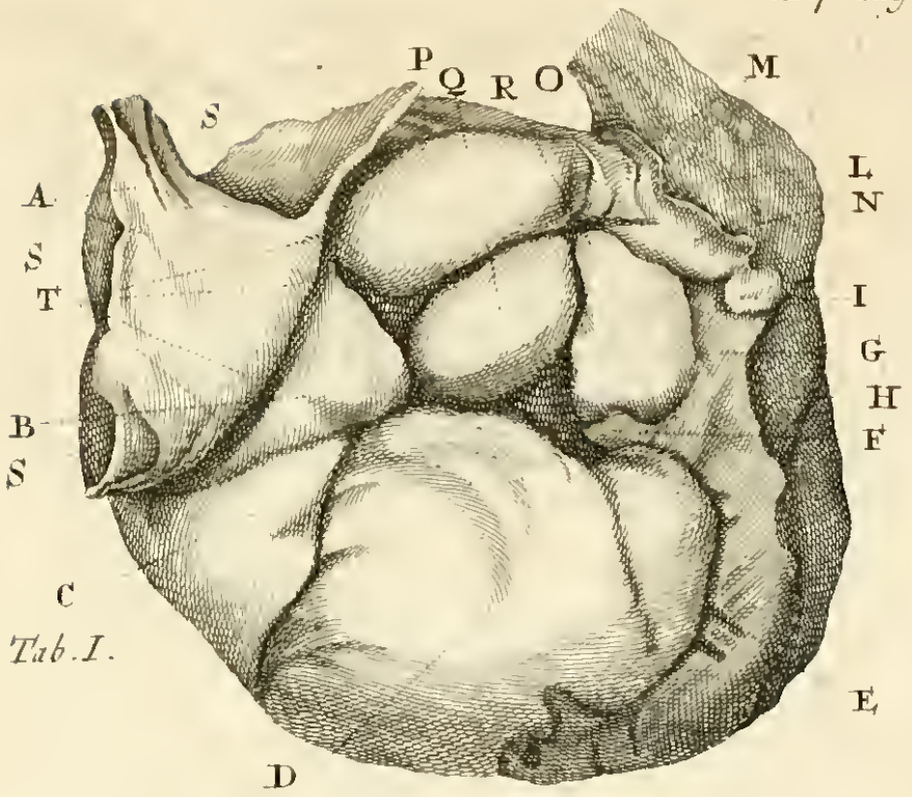
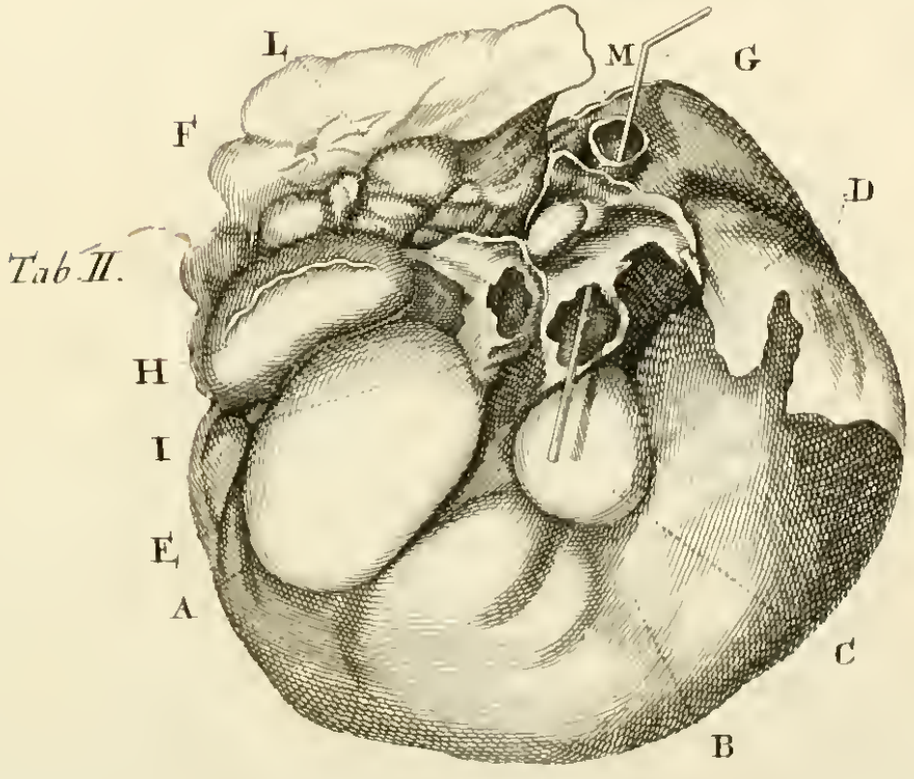


Fig. 4.


A
B
H
G
L
n
C
M
D
F
E
Fig. 1.
A
B
H
C
M
n
F
Q
P
G
Fig. 2.
A
B
C
G
D
H
L
E
N
M
F
Fig. 3.
A
N
M
n
C
F
Fig. 4.


P
Q
R
O
M
S
L
N
I
G
H
F
E
D
L
M
G
D
C
B


P
Q
R
O
M
S
L
N
A
S
T
I
G
H
B
F
S
C
Tab. I.
E
D


L
M
G
F
D
Tab. II.
H
I
E
A
C
B

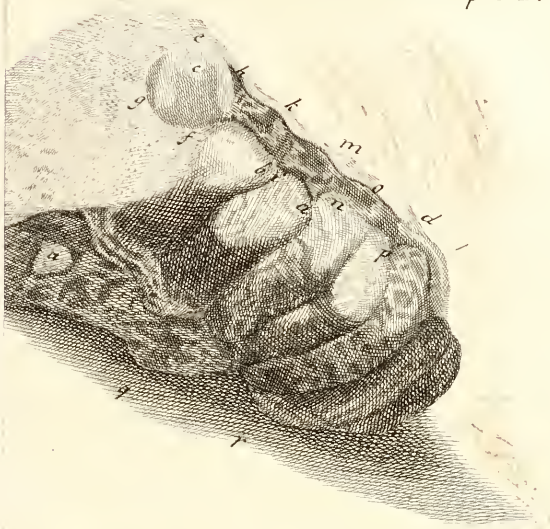


Fig. B.

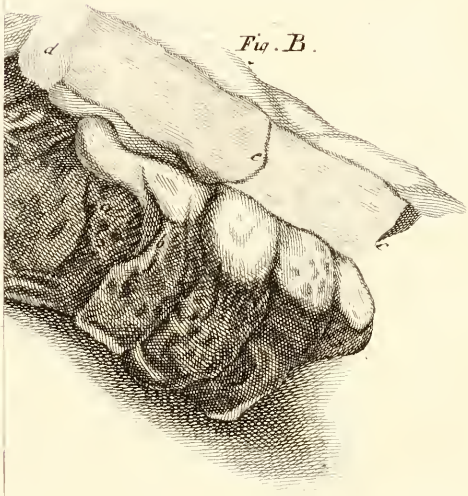
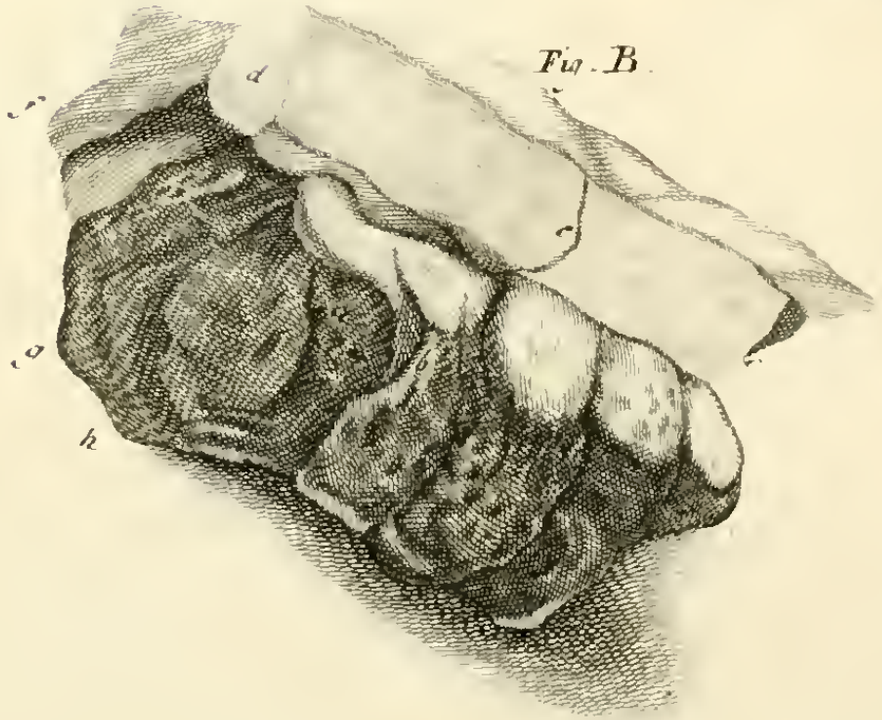
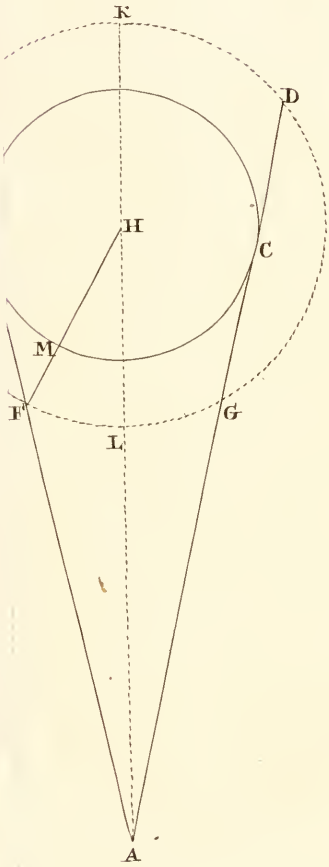
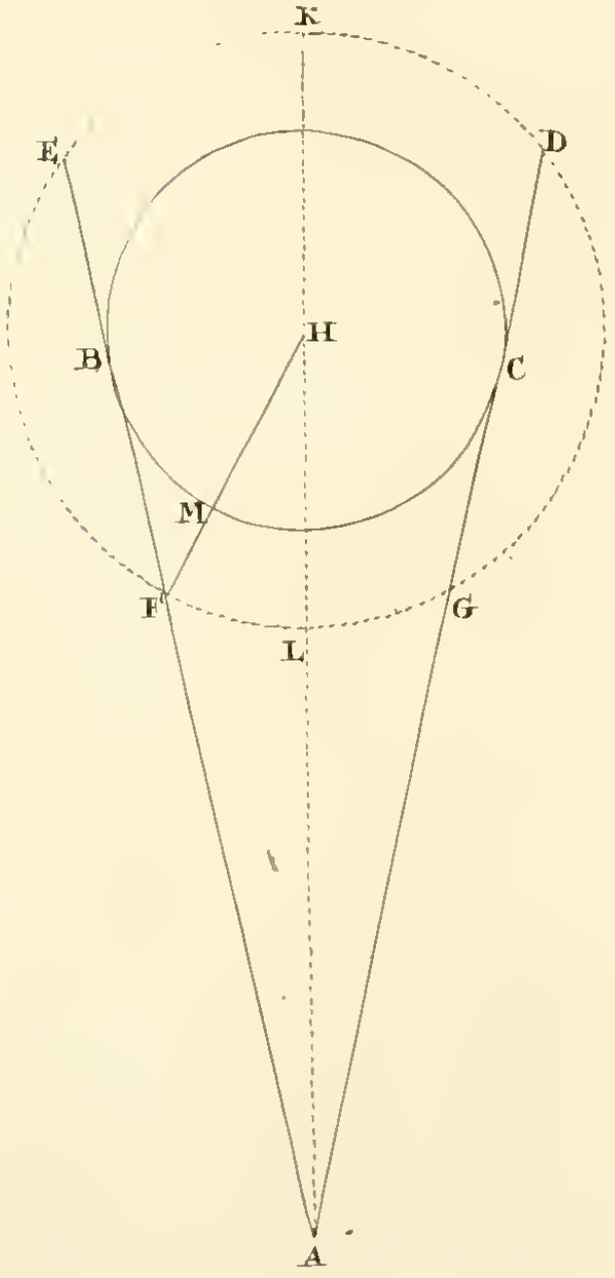


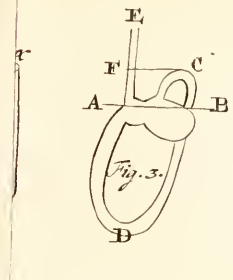
Fig. A

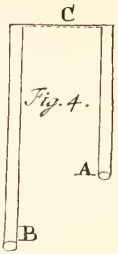
Fig. B

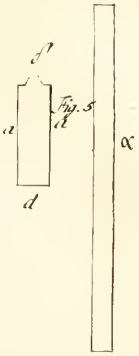



K
D
H
C
M
F
G
L
A


K
E
D
H
B
C
M
F
G
L
A


E
F
C
A
B
D
Fig. 3.


C
A
B
Fig. 4.


d'
a
a'
Fig. 5
d
α

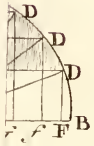
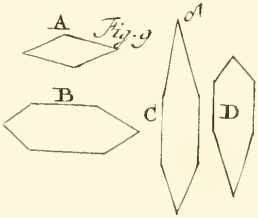

D
D
D
B
F

Fig. 8.


A
Fig. 9
B
C
D

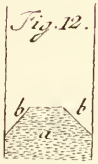
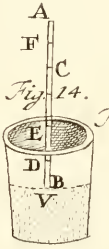
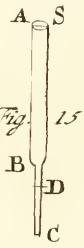
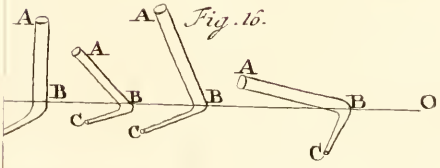


Fig. 12.
b
b
a

E
D
C
B
A
Fig. 13


A
F
C
Fig. 14.
E
D
B
V


A
S
Fig. 15
B
D
C


A
B
C
A
Fig. 16.
A
B
C
A
B
O
C

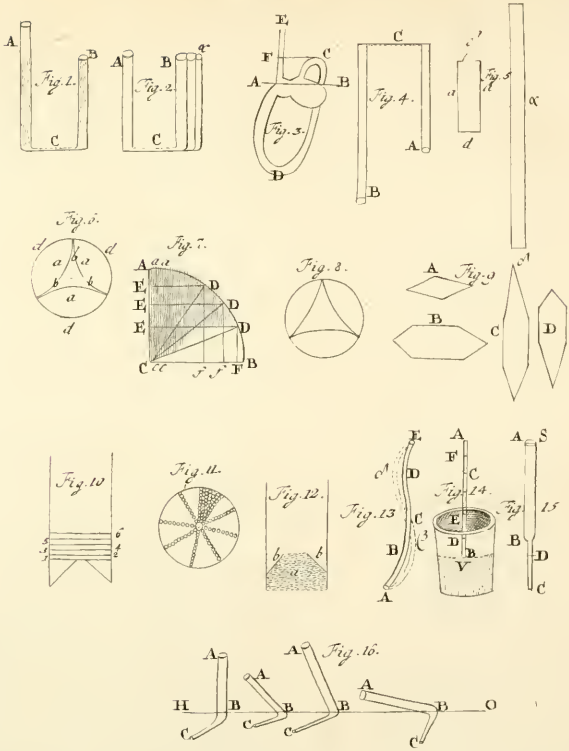


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.

Fig. 2.

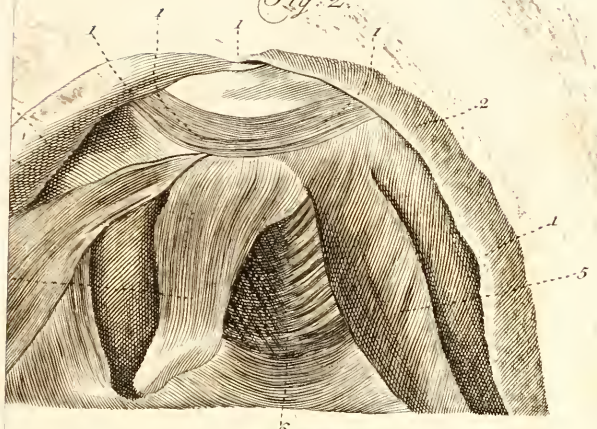


Fig. 1.

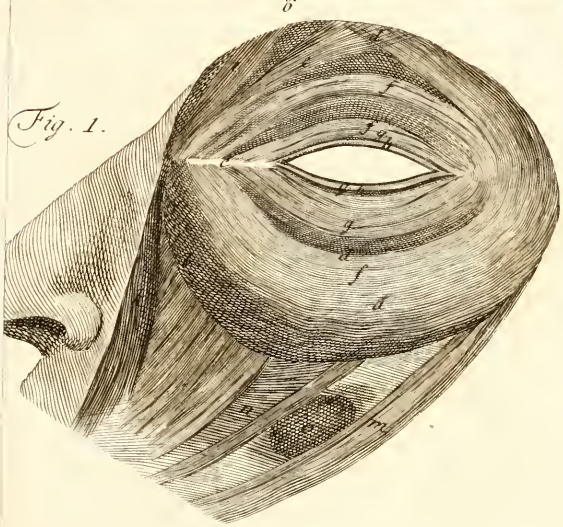


Fig. 2.

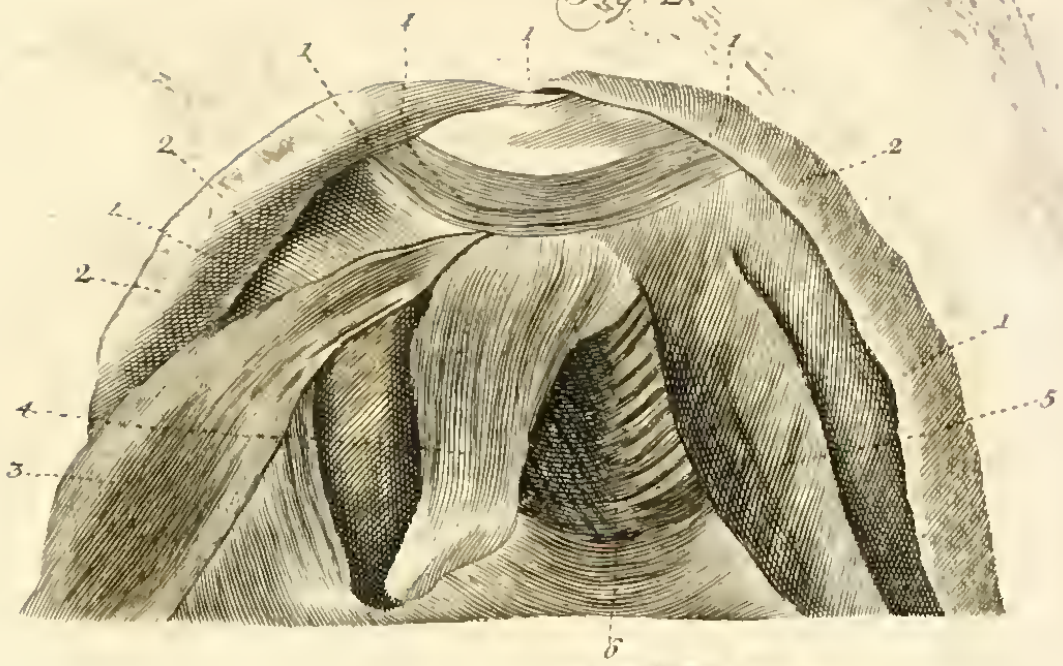
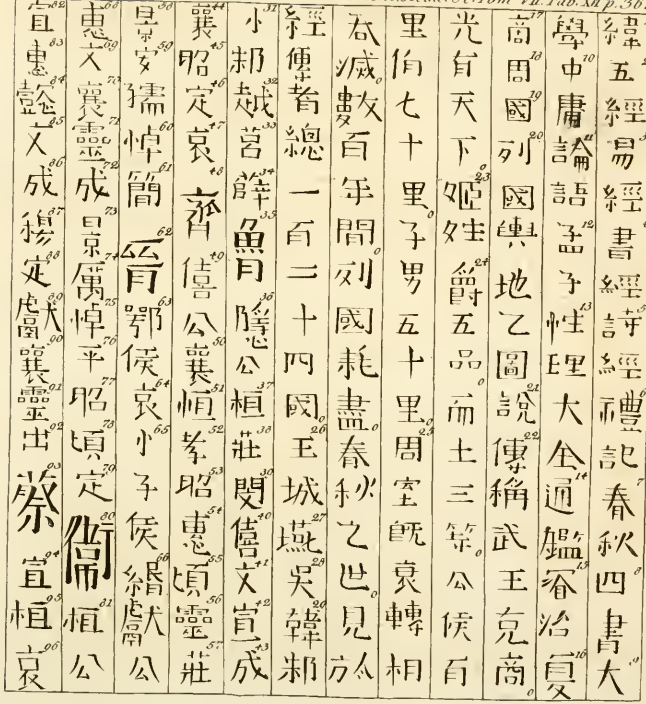
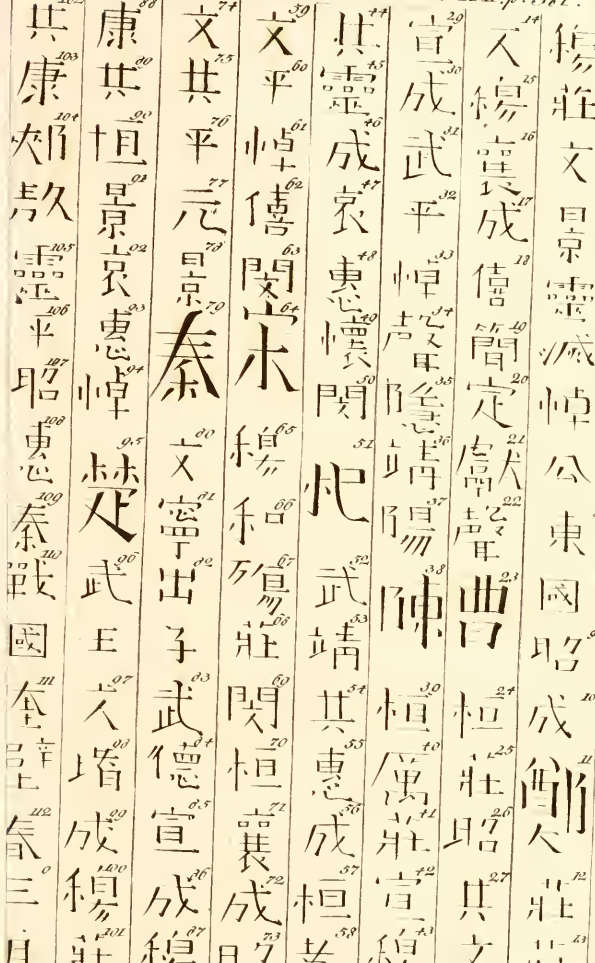
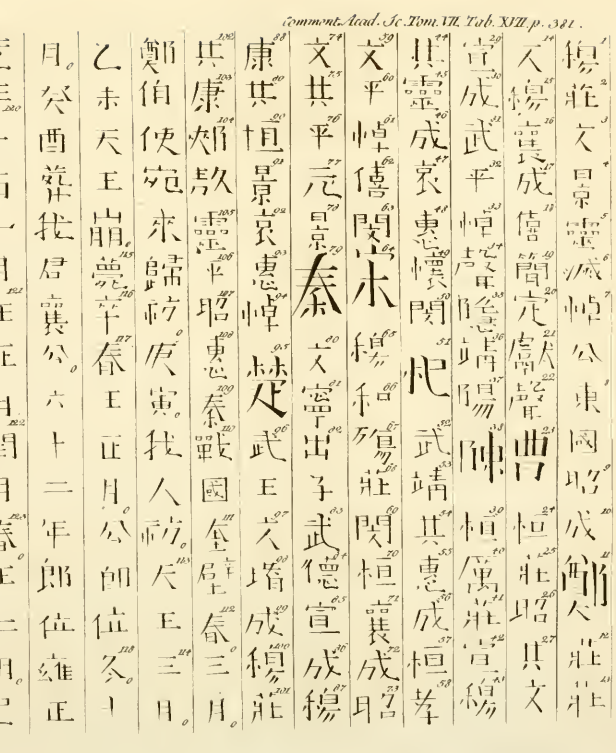


Fig. 1.

孫嘉五經易經書經詩經禮記春秋四書大學中庸論語孟子性理大全通鑑綱治夏商周國列國輿地之圖說傳稱武王克商光有天下姬姓爵五品而土三等公侯百里侯七十里子男五十里周室既衰轉相吞滅數百年間列國耗盡春秋之世見於經傳者總一百二十四國王城嶽吳韓邾小邦越莒鄫魚肖隱公桓莊閔僖文宣成


綵五經易經書經詩經禮記春秋四書大
學中庸論語孟子性理大全通鑑綱目治
商周國列國輿地乙圖說傳稱武王克商
光有天下姬姓爵五品而土三等公侯百
里侑七十里子男五十里周室既衰轉相
吞滅數百年間列國耗盡春秋之世見於
經傳者總一百二十四國王城嶌吳韓邾
小邾越莒鄫魯滕薛公桓莊閔僖文宣成
襄昭定哀齊僖公襄桓孝昭惠頃靈莊
景安獮悼簡晉鄭侯哀小子侯繒獻公
惠太寧靈成景厲悼平昭頃定侑桓公
且惠愍文成穆定虞襄靈出榮宣桓哀

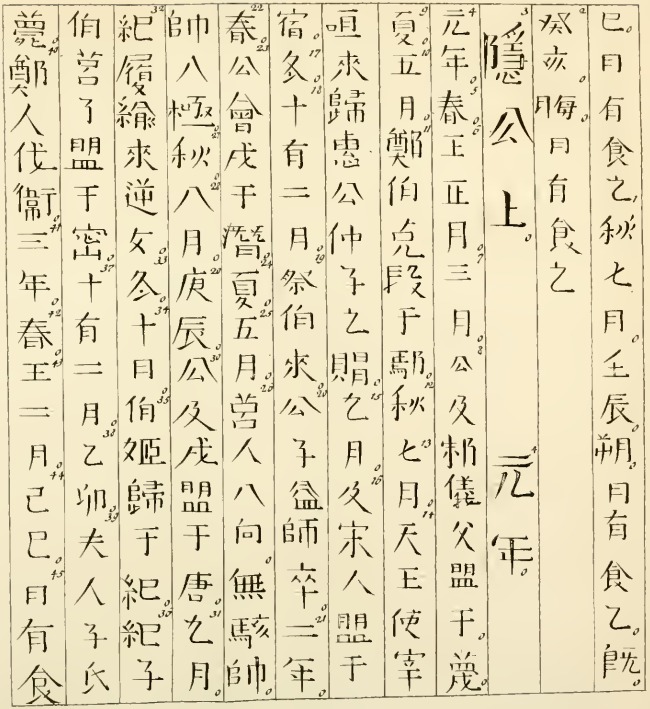

穆莊文景靈成悼公東周昭成
天穆莊襄成僖閒定僖桓莊昭其文
宣成武平悼昭襄悼閔
共靈成哀惠懷閔
文平悼僖閔宋
文共平元景
康共桓景哀惠悼
共康烈敬
靈平昭惠秦
戰國
氣三月。


穆莊文昌靈減悼公東周昭成朝文莊莊
文穆莊康成僖閻定僖昌莊昭其文
宣成武平悼莊宣閔頃頃陳桓厲莊宣穆
其靈成哀惠懷閔犯武靖其惠成桓孝
文平悼僖閔木桓禾僖莊閔桓襄成宮
文其平元景秦文寧出子武德宣成穆
康共桓景哀惠悼棘犯武王文增成穆莊
共康烟敖靈平昭惠秦戰國昌君春三月
鄭伯使宛來歸衎庚寅我人衎戊王三月
乙未天王崩鄭伯突秦王正月公朔位冬十
月癸酉葬我君襄公六十二年郎位雍正
元年十有一月王正月閏月秦王二月己

已有食之秋七月壬辰朔月有食之餼
羊亦每月有食之

隱公上 元年

元年春王正月三月公及邾儀父盟于蔑
夏五月鄭伯克段于鄢秋七月天王使宰
咺來歸惠公仲子之賵乙月及宋人盟于
宿冬十有二月祭伯來公子益師卒三年
春公會戎于潛夏五月莒人入向無駭帥



巳日有食之秋七月壬辰朔日有食之既
邾子克卒
庚寅日有食之

隱公上 元年

元年春王正月三月公及邾儀父盟于蔑
夏五月鄭伯克段于鄢秋七月天王使宰
咺來歸惠公仲子之賵冬十月乙卯夫人子氏
薨鄭人伐衛三年春王二月己巳日有食
宋公會戎于潛夏五月莒人入向無駭帥
師入極秋八月庚辰公及戎盟于唐冬十月
紀履繻來逆女冬十月伯姬歸于紀紀子
伯莒子盟于密十有二月乙卯夫人子氏
薨鄭人伐衛三年春王二月己巳日有食
宋公會戎于潛夏五月莒人入向無駭帥
師入極秋八月庚辰公及戎盟于唐冬十月
紀履繻來逆女冬十月伯姬歸于紀紀子
伯莒子盟于密十有二月乙卯夫人子氏

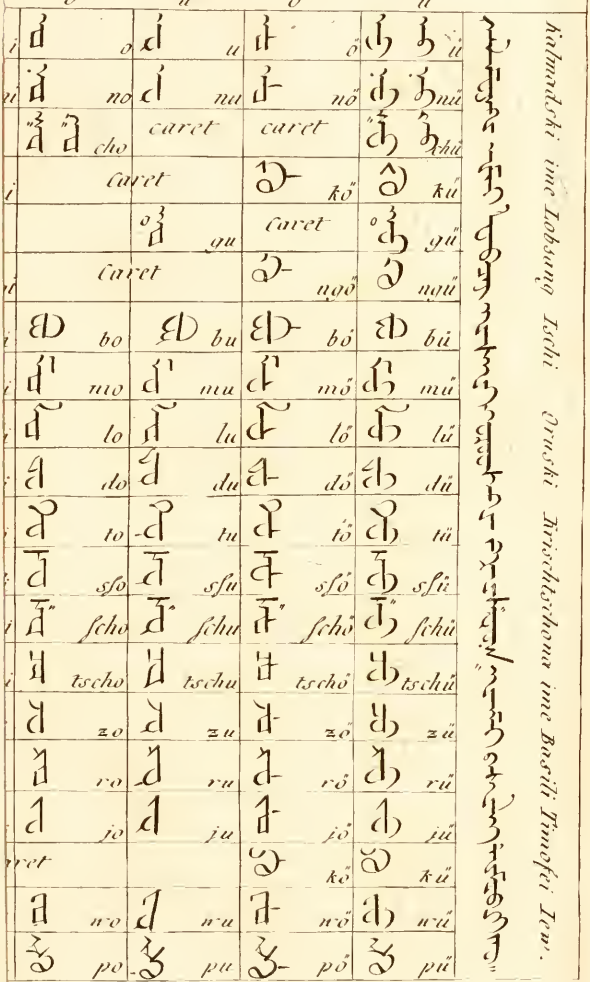
乙三月庚戌天王崩夏四月辛卯尹氏卒
秋武氏子來求賻八月庚辰宋公和卒冬
十有二月齊侯鄭伯盟于石門癸未葬宋
穆公　隱公中四年春王二月莒人伐
杞取牟婁戊申衛州吁弑其君完夏公及
宋公遇于清宋公陳侯蔡人衛人伐鄭秋
翬帥師帥師會宋公陳侯蔡人衛人伐鄭乙
衛人殺州吁于濮冬十有二月衛人立晉

乙三月庚戌天王崩夏四月辛卯尹氏卒
秋武氏子來求賻八月庚辰宋公和卒冬
十有二月齊侯鄭伯盟于石門癸未葬宋
穆公　隱公中四年春王二月莒人伐
杞取牟婁戊申衛州吁弑其君完夏公及
宋公遇于清宋公陳侯蔡人衛人伐鄭秋
翬帥師會宋公陳侯蔡人衛人伐鄭乙月
衛人殺州吁于濮冬十有二月衛人立晉
五年春公觀魚于棠夏四月葬衛桓公秋
衛師入成乙月考仲子宮初獻六羽羽人
伐鄭宋螾冬十有二月辛巳公子彄卒
宋人伐鄭圍長葛六年春鄭人來輸平夏

五月辛酉公會齊侯盟于艾秋七月冬宋
人取長葛七年春王三月叔姬歸于紀蔡
侯辛夏城中丘齊侯使其弟年來聘秋公
伐邾冬天王使仍叔之子來聘戎伐凡伯于楚
丘以歸隱公下八年春宋公衛侯遇于垂
三月鄭伯使宛來歸祊庚寅我入祊夏六
月己亥蔡侯考父卒辛亥宿男卒秋七月
庚午宋公齊侯衛侯盟于瓦屋八月葬蔡

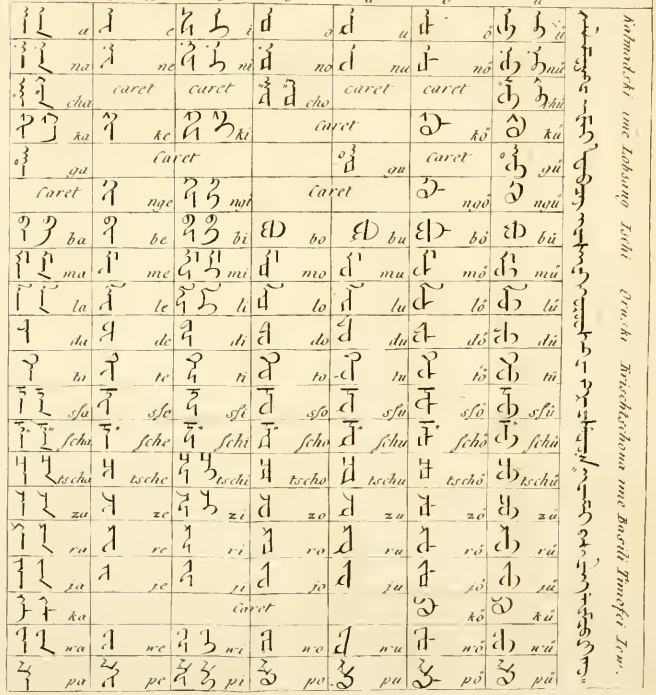
五月辛酉公會齊侯盟于艾秋七月冬宋
人取長葛七年春王三月杞伯姬歸于紀葬
侯卒夏城中丘齊侯使其弟年來聘秋公
伐邾冬天王使仍伯來聘戊伐凡伯于楚
丘以歸隱公下八年春宋公衛侯遇于垂
三月鄭伯使宛來歸祊庚寅我入祊夏六
月己亥蔡侯考父卒辛亥宿男卒秋七月
庚午宋公齊侯衛侯盟于瓦屋八月莞葵
宣公乞月辛卯公及邾人盟于浮來螟冬
十有二月無駭卒乙未入極十一年春天王使南季來
聘三月癸酉大雨震電庚辰雨雪祋辛夏
城郎秋七月冬公會齊侯于防

TA CALMUCICA



Kalmandschi imé Lobsang Tschi Oruschi Kriechischoma imé Basili Timofei Iew.

ELEMENTA CALMUCICA



Kalmuckische und Lakonische Tartarische Griechischen und Russische Buchstaben Tafel IV.

AMNH LIBRARY
100125003